

## TEMA 6: Derivades i tècniques de derivació

### Solucions

1. a)  $f'(-1) = 0$       b)  $f'(2) = \frac{-1}{2}$       c)  $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$   
 2.  $f'(x) = 2x + 2$       b)  $f'(x) = \frac{-2}{x^2}$       c)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

3.

1) $f'(x) = 0$	2) $f'(x) = -2$
3) $f'(x) = -2$	4) $f'(x) = \frac{-7}{2}$
5) $f'(x) = -4x$	6) $f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 2x$
7) $f'(x) = x^2$	8) $f'(x) = \frac{-2}{3x^3}$
9) $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$	10) $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$
11) $f'(x) = 20x^3 + 15x^2 + 34x - 3$	12) $f'(x) = \frac{45x^4 - 30x^3 + 4x^2 - 19}{(5x^2 + 1)^2}$
13) $f'(x) = \frac{-25}{x^6}$	14) $f'(x) = \frac{-25}{x^6} - \frac{6}{x^3}$
15) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	16) $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$
17) $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}}$	18) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
19) $f'(x) = 4(x^2 + 3x - 2)^3 \cdot (2x + 3)$	20) $f'(x) = \frac{18x(x^2 + 2)^2}{5}$
21) $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$	22) $f'(x) = \frac{5x^4 - 3x^2}{4\sqrt{(x^5 - x^3 - 2)^3}}$
23) $f'(x) = \frac{-4x}{3\sqrt{(x^4 - 1)^2}}$	24) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}$
25) $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$	26) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10$
27) $f'(x) = -2x \cdot e^{3-x^2}$	28) $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
29) $f'(x) = 3^{2x^2} \left( \ln 3 \cdot 4x \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$	30) $f'(x) = \frac{2e^{2x}(x-1)}{x^3}$
31) $f'(x) = 2^{x^2-1} \cdot \ln 2 \cdot 2x$	32) $f'(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot x$
33) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^x$	34) $f'(x) = 3(x^2 - x^3) \cdot e^{-3x}$
35) $f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot (2x-1)}{2x\sqrt{x}}$	36) $f'(x) = \frac{8x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x}$

37) $f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x + 1) \cdot (e^x - 1)}$	38) $f'(x) = \frac{-2}{(1 - x^2) \cdot \ln 10}$
39) $f'(x) = \frac{1 - 2x}{2x(1 - x)}$	40) $f'(x) = \frac{2}{3x(x + 2)}$
41) $f'(x) = \frac{4x^3 - 3}{(x^4 - 3x) \cdot \ln 2}$	42) $f'(x) = \frac{1}{3x \cdot \sqrt[3]{(\log_4 3x)^2} \cdot \ln 4}$
43) $f'(x) = \frac{-2}{(1 - x^2)}$	44) $f'(x) = x^4 (5 \ln x + 1)$
45) $f'(x) = \frac{5 \cdot \ln^4 x}{x}$	46) $f'(x) = \frac{5x - 1}{(2x - 1)(x - 2)}$
47) $f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} x$	48) $f'(x) = 2 \sin (7 - 2x)$
49) $f'(x) = 6(1 + \operatorname{tg}^2 2x)$	50) $f'(x) = \frac{5 \sin(5x + 2)}{\cos^2(5x + 2)}$
51) $f'(x) = \frac{\cos x}{3 \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x}}$	52) $f'(x) = 9 \sin^2 3x \cdot \cos 3x$
53) $f'(x) = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2(3 - 2x))}{\operatorname{tg}^2(3 - 2x)}$	54) $f'(x) = \frac{2}{(x - 1)^2} \cdot \sin \frac{x + 1}{x - 1}$
55) $f'(x) = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} = \frac{-1}{1 + \sin x}$	56) $f'(x) = 4x^3 \cdot \cos x^4$
57) $f'(x) = 4 \sin^3 x \cdot \cos x$	58) $f'(x) = \frac{-\sin x}{5}$
59) $f'(x) = -(6x + 1) \cdot \sin(3x^2 + x - 1)$	60) $f'(x) = -5 \cos 5x \cdot \sin 5x$
61) $f'(x) = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$	62) $f'(x) = \frac{8x(1 + \operatorname{tg}^2 4x^2)}{\operatorname{tg}^2 4x^2}$
63) $f'(x) = 2 \cot g 4x \cdot \frac{4(1 + \operatorname{tg}^2 4x)}{\operatorname{tg}^2 4x}$	64) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{5 - x^2} \cdot \sqrt{x^2 - 4}}$
65) $f'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$	66) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1 + x)}$
67) $f'(x) = \frac{2}{(1 - x)^2 + (1 + x)^2} = \frac{1}{1 + x^2}$	68) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}$
69) $f'(x) = \frac{6x}{1 + 9x^4}$	70) $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}}$
71) $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot gx$	72) $f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x} = -2 \operatorname{tg} 2x$
73) $f'(x) = \frac{-1}{\operatorname{tg}(1 - x)} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2(1 - x))$	74) $f'(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$
75) $f'(x) = \cos \sqrt{\ln(1 - 3x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(1 - 3x)}} \cdot \frac{1}{1 - 3x} \cdot (-3)$	76) $f'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2(\sin \sqrt{5x})) \cdot \cos \sqrt{5x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x}} \cdot 5$
77) $f'(x) = 2 \sin(\cos 2x) \cdot \cos(\cos 2x) \cdot (-\sin 2x) \cdot 2$	78) $f'(x) = -3 \sin 3^x \cdot 3^x \cdot \ln 3$

4.

1) $y' = \left[ 5 \ln(x^3 + 3x - 2) + \frac{(5x+7)(3x^2+3)}{x^3+3x-2} \right] \cdot (x^3 + 3x - 2)^{(5x+7)}$	2) $y' = \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right] \cdot (\ln x)^{\sqrt{x}}$
3) $y' = \left[ -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] \cdot (\sin x)^{\cos x}$	4) $y' = \left[ \frac{-2}{x^3} \cdot \ln(\arccos x) + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right] \cdot x^2 \sqrt{\arccos x}$
5) $y' = \left[ \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{actgx}}{x} \right] \cdot x^{\operatorname{artgx}}$	6) $y' = \left[ \frac{\ln \arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] \cdot (\arcsin x)^{\ln x}$

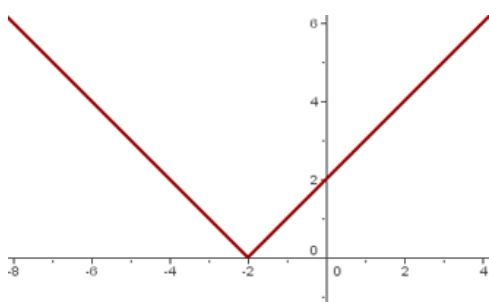
5.

1) $f^{(n)}(x) = 0$	2) $f^{(n)}(x) = 0$	3) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} n & \text{senar} \rightarrow (-1) \cdot \cos x \\ n & \text{parell} \rightarrow (-1) \sin x \end{cases}$
4) $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$	5) $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{x^n}$	6) $f^{(n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$

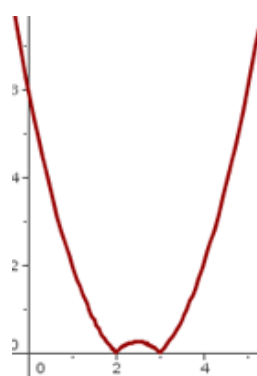
6.

1) $y' = 3$	2) $y' = \frac{-x}{y}$
3) $y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy + 2y}$	4) $y' = \frac{2x \cdot \sin(x+y) + x^2 \cdot \cos(x+y) - 5y \cdot e^x}{-x^2 \cdot \cos(x+y) + 5e^x}$

7. La funció no és derivable en  $x = -2$



8. La funció no és derivable en  $x = 2$  i en  $x = 3$



9. La funció no està definida en  $x = 0$ , llavors no és continua i per tant tampoc és derivable.

La funció és continua en  $x = \frac{\pi}{2}$ , però no és derivable

10. La funció és derivable per  $a = 1$

11.  $a = -1$  i  $b = 0$

12. Perquè una funció sigui derivable ha de ser continua. En aquest cas la funció no és continua en  $x = 0$  per a qualsevol valor de  $a$  i  $b$ , es a dir que no existeixen valor de  $a$  i  $b$  que facin continua la funció i per tant no existeixen  $a$  i  $b$  per als quals la funció sigui derivable.

13. a)  $r: y - 1 = 1(x - 0) \rightarrow r: y = x + 1$

b)  $P\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$

14.  $P(0,2)$

16.  $b = -5$ ,  $c = 8$  i  $d = -1$

17.  $r: y = x$

18. a) Per  $x = 0 \rightarrow r: y = x$

b) Per  $x = \pi \rightarrow r: y = -e^\pi(x - \pi)$

19.  $r: y = -\pi(x - \pi)$

20.  $P(1, 3)$

21.  $P(-3, 93)$        $Q(2, -32)$

22.

$$r_1: y - \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 1\left(x - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

$$r_2: y + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 1\left(x + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

23. Sol:  $b = 0$  i  $b = \frac{-2}{9}$

24. Sol:  $a = 3$ ,  $b = -5$   $c = 1$

25. Sol:  $a = \frac{-2}{9}$ ,  $b = \frac{-1}{3}$ ,  $c = \frac{4}{3}$   $d = \frac{31}{9}$