TEMA 1 : Matrius i determinats

Activitats

1. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculeu: **A + B; A - B; A x B; B x A;** A^t.

2. Considereu les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostreu que traça (A·B) = traça (B·A)

3. Resoleu l'equació matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Una matriu quadrada M és ortogonal si compleix $M^t \cdot M = I$. Determineu si ho són les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Demostreu que $A^2 - A - 2I = 0$, essent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Calculeu el valor dels paràmetres a,b,c i d que verifiquen la igualtat següent:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & b \\ c & 0 & d \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

7. Per quina matriu hi ha que multiplicar la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, per obtenir la matriu $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

8. Sigui la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu A^n per a $n \in N$

9. **(PAU 2005)** Donades les matrius A, B i C, trobeu la matriu X = A(B – C)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. (PAU 2005) l'estoc de components d'un magatzem de rodes de vehicles de diferents tipus apareix resumit a la taula següent (en centenars d'unitats):

	pneumàtics	**embellidors**	**llantes**
utilitaris	3.1	0.3	2.1
berlines	1.6	1.1	0.6
Vehicles tot terrenys	0.9	0	0.2

La quantitat de quilos de matèria primera necessària per cada component és

	acer	**cautxú**
pneumàtics	0.1	4.6
embellidors	1	0.05
llantes	5	0

a) Calculeu el total d'acer acumulat al magatzem

b) Calculeu el total de cautxú acumulat al magatzem

11. Una fàbrica produeix dos models de rentadores A i B, en tres terminals N, L, S,. Produeix del model A: 400 unitats en la terminal N, 200 unitats en la terminal L, i 50 unitats en la terminal S. Produeix del model B: 300 unitats en la terminal N, 100 unitats en la terminal L, i 30 unitats en la terminal S. La terminal N porta 25 hores de taller i 1 hora d'administració. La terminal L porta 30 hores de taller i 1.2 hora d'administració. La terminal S porta 33 hores de taller i 1.3 hora d'administració.

    a) Representeu la informació en dos matrius

    b) Trobeu una matriu que expressi les hores de taller i d'administració emparades per cadascun dels models .

12. **(PAU 2006).** Indiqueu tots els productes de dues matrius diferents que es poden formar amb:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

13. **(PAU 2007).** Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de p i q que fan certa la igualtat $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu què val A^{10} sense calcular-ho.

14. **(PAU 2006).** Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calculeu A·B i B·A.

b) Comproveu que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

15. Calculeu el determinat de les matrius següents, si és possible, En cas que no ho sigui, indiqueu la raó.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Calculeu la matriu inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Per a quins valors de x la següent matriu no admet matriu inversa

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Per a quins valors del paràmetre a la matriu A té inversa?. Calculeu-la per a a = -1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

19. **(PAU 2006).** Donades les matrius A i B, esbrineu si existeix una matriu C tal que B·C = A. En cas afirmatiu, calculeu-la.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

20. **(PAU 2004).** Considereu les matrius següents $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Trobeu una matriu X tal que A·X + A = B

21. Considereu les matrius següents

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trobeu una matriu X que compleix que A·X + 2B = 3A + B

22. Calculeu el rang d'aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 8 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

23. **(PAU 2006).** Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determineu els valors de m per als quals rang A < 3. Pot ser rang A = 1 per algun valor de m?

24. Estudieu el rang de les matrius següents en funció del paràmetre a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & a \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2a & 0 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & a-2 & 5 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a+2 \\ 1 & 2a & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & a & 9 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 2 & a & -a+5 \\ a & 8 & 2 \end{pmatrix}; M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & -2 & a-1 \end{pmatrix}; N = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

25. **(PAU 2005).** La matriu P expressa el preu per unitat (en euros) de quatre articles A,B,C i D, procedents de les fàbriques f_1,f_2, i f_3:

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si el vector C (x,y,z,t) representa una comanda, què representa cada element del producte C·P? Si volem comprar 25 unitats de A, 30 de B, 60 de C i 75 de D, quina fàbrica ens ofereix millor preu?.

26. **(PAU 2005).**Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu de forma raonada A^{55}.

27. **(PAU 2005).** Donades $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, trobeu els nombres a i b que fan que A·B = B·A.

28. **(PAU 1998).** Donada la matriu $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, utilitzeu la inversa B^{-1} per trobar una matriu X tal que B·X·B = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

29. **(PAU 2008).** Considereu les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Trobeu la matriu M, quadrada d'ordre 2, tal que $M \cdot A = B$.

b) Comproveu que $M^2 = I_2$ (matriu identitat d'ordre 2) i deduïu l'expressió de M^n.

30. **(PAU 2008).** Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

a) Calculeu el valor de a i b per tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu A^3 i A^4.

c) Si n és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de A^n en funció de n.

31. (PAU 2009). Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comproveu que la inversa de A és A^2.

b) Comproveu també que $A^{518} = B$.

32. **(PAU 2009).** Considereu la matriu. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$ = Trobeu els valors dels paràmetres a i b perquè la matriu tingui rang 1.

33. **(PAU 2008).** Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre m. Estudieu-ne el rang segons els valors de m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

34. **(PAU 2008).** Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A^{10}.

35. **(PAU 2007).** Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculeu A^2 i A^3.

b) Determineu, raonadament, el valor de A^{60124}.