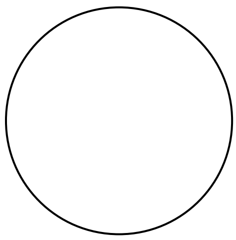
TEMA 1: Trigonometria

La trigonometria, és la part de la geometria dedicada a la resolució de triangles , es a dir, a determinar els valors dels angles i dels costats d'un triangle.

1.1 MESURA D'ANGLES

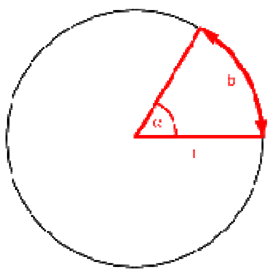
Per mesurar angles adoptarem el següent sistema de referència: sobre uns eixos , situarem el vèrtex a l'origen de coordenades, el costat fix de l'angle sobre l'eix d'abscisses positiu, i prendrem com a sentit positiu el sentit contrari al se les agulles del rellotge, considerarem que són angles amb sentit negatiu el mateix sentit que les agulles del rellotge.



Els angles es poden mesurar en graus sexagesimals, que ja has estudiat en cursos anterior, i en radians:

1.1.1 El radian

L'arc que mesura la mateixa longitud que el radi de la circumferència determina un angle anomenat radian i que es designa per rad.



1.1.2 Relació entre graus sexagesimal i radians:

Per trobar aquesta relació nomes cal deduir quants radians mesura una circumferència, que sabem mesura 360º:

$$L_{\text{circumferència}} = 2\pi r$$

$$\alpha(\text{radians})_{\text{circumferència}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Per tant, una circumferència mesura 2π radians

L'equivalència entre les dues unitats és la següent:

$$\boxed{360^{\circ} = 2\pi \text{ radians} \rightarrow 180^{\circ} = \pi \text{ radians}}$$

EXEMPLES:

1. Expressa en radians els següents angles :

$$a)\alpha = 100^{o} \cdot \frac{\pi rad}{180^{o}} = \frac{5\pi}{9} rad$$
$$b)\alpha = 245^{o} \cdot \frac{\pi rad}{180^{o}} = \frac{49\pi}{36} rad$$

2. Expressa en graus sexagesimals els angles:

$$a)\alpha = \frac{\pi}{3} rad \cdot \frac{180^{o}}{\pi rad} = 60^{o}$$
$$b)\alpha = 2 rad \cdot \frac{180^{o}}{\pi rad} = \frac{360^{o}}{2\pi} = 57.3^{o}$$

1.2 RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'ANGLES QUALSSEVOL

1.2.1 Circumferència goniomètrica :

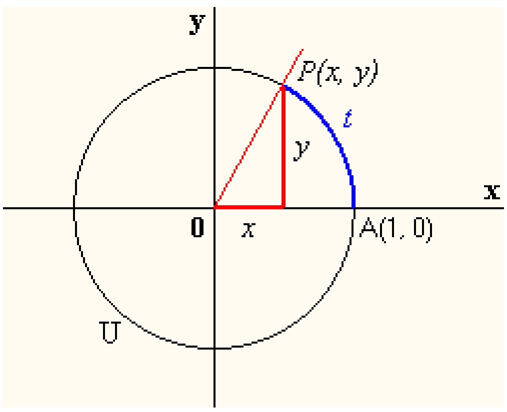
Tracem una circumferència de radi 1. Prenem uns sistema de coordenades amb el origen al centre de la circumferència.

Els angles se situen sobre la circumferència de la manera següent:

- El vèrtex al centre:
- Un dels costats coincideix amb el semieix positiu de les X
- L'altre costat se situa on correspongui, seguint el moviment contrari de les busques del rellotge.

Aquesta circumferència, sobre la qual se situen els angles s'anomena **circumferència goniomètrica**.

1.2.2 Sinus i cosinus d'un angle entre 0º i 360º



Si situem el angle agut a, sobre la circumferència goniomètrica,

D'aquesta manera si l'angle talla la circumferència en un punt P(x,y):

Sin a = $\frac{y}{1} = y$ (alçada)

Cos a = $\frac{x}{1} = x$ (amplada)

Valor de les raons trigonomètriques dels angles principals del 1r. quadrant.

Radián	**Ángulo**	**sen**	**cos**	**tan**
0	0^o	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0
$\frac{\pi}{6}$	30^o	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90^o	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	∞

Signe de les raons trigonomètriques:

Observa la circumferència goniomètrica i completa la següent taula:

	1r. quadrant	2n. quadrant	3r. quadrant	4t. quadrant
Signe sin a				
Signe cos a				

Nota:

De la definició de sin a i cos a sobre la circumferència goniomètrica, se dedueix de forma immediata que:

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 \leq \sin a \leq 1 \\ -1 \leq \cos a \leq 1 \end{array}}$$

1.3 RELACIONS FONAMENTALS

Recorda del curs passat:

$$tga = \frac{\sin a}{\cos a}$$
$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Exercici:

1. Si sin a = $\frac{3}{4}$, i 0º < a < 90º, trobeu cos a i tg a
2. si tg a = 2, i 0º < a < 90º, trobeu cos a i sin a
3. Si cos a = $-\frac{4}{5}$, i 90º < a < 180º, trobeu sin a i tg a
4. Si tg a = 3, i 270º < a < 360º, trobeu cos a i sin a

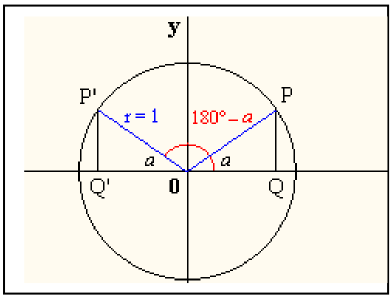
1.4 REDUCCIÓ AL PRIMER QUADRANT

1.4.1 Angles suplementaris: a i 180º - a

Sin (180º - a) = sin a

Cos (180º - a) = - cos a

Tg (180º - a) = - tga



1.4.2 Angles que difereixen en 180º : a i a + 180º

Sin (a + 180º) = -sin a

Cos (a + 180º) = - cos a

Tg (a + 180º) = tga

1.4.3 Angles oposats: a i –a (360º - a)

Sin (-a) = -sin a

Cos (-a) = -cos a

Tg (-a) = -tga

1.4.4 Angles complementaris: a i 90º - a

Sin (90º - a) = cos a

Cos (90º - a) = sin a

Tg (90 - a) = cotg a

1.4.5 Angles que difereixen en 90º: a i a + 90º

Sin (a + 90º) = cos a

Cos (a + 90º) = - sin a

Tg (a + 90º) = - cotg a

1.5 RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

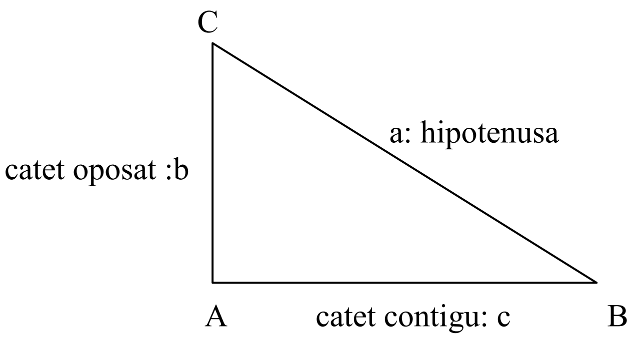
Resoldre un triangle és trobar el valor dels tres angles i els tres costats. En el cas dels triangles rectangles un dels angles serà sempre conegut, ja que hi ha un que mesura 90º.

Fórmules que utilitzarem:
Suma dels angles d'un triangle: A + B + C = 180º
Teorema de Pitàgores: $h^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2$
Raons trigonomètriques:

$$\sin B = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan B = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{b}{c}$$



EXERCICIS:

Resol els següents triangles rectangles en A:

a) b = 5cm, i c = 12 cm
b) b = 43m i B = 37º
c) a = 5cm, i B = 43º

1.6 RESOLUCIÓ DE TRIANGLES QUALSSEVOL

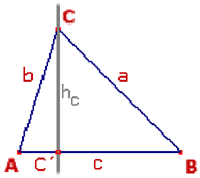
Ara obtindrem dues fórmules que ens permetran resoldre directament triangles que no són rectangles.

1.6.1 Teorema del sinus

En un triangle qualsevol de costats a, b, c i angles A, B, i C:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,(A)} = \frac{b}{\text{sen}\,(B)} = \frac{c}{\text{sen}\,(C)}}$$

Demostració



En el triangle o AC´C i BCC' es compleix que :

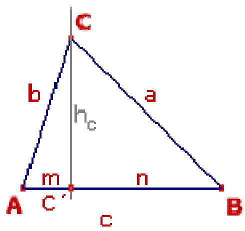
$$\left.\begin{aligned} \sin A = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin A \\ \sin B = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \cdot \sin B \end{aligned}\right\} \Rightarrow b \cdot \sin A = a \cdot \sin B \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

De manera anàloga es demostraria la tercera igualtat, nomes caldria agafar una altra altura

1.6.1 Teorema del cosinus

En un triangle qualsevol de costats a, b, c i angles A, B, i C:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}}$$



Demostració:

En el triangle rectangle AC´C es verifica:

$$\cos A = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos A$$

$b^2 = m^2 + h_c^2$

Per altra banda n = c – m

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle BCC':

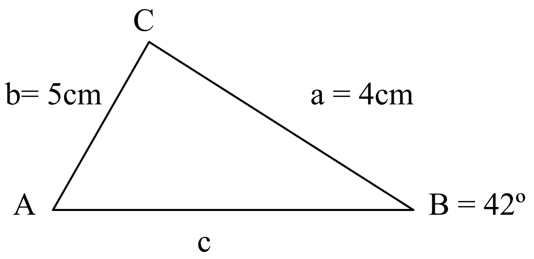
$a^2 = h_c^2 + n^2 = h_c^2 + (c - m)^2 = h_c^2 + c^2 - 2cm + m^2 = b^2 + c^2 - 2cm$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

De manera anàloga podríem arribar a les altres dues relacions.

EXEMPLES:

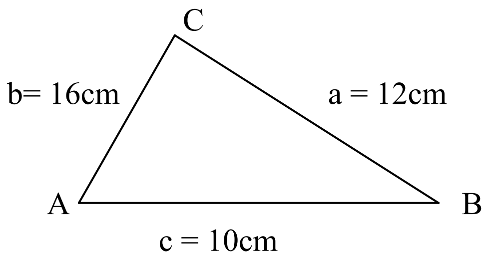
1. Si a = 4cm, B = 30º i b = 5cm, calculeu A:



Aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{4}{\sin A} = \frac{5}{\sin 30^{\circ}} \rightarrow \sin A = \frac{4 \cdot \sin 30^{\circ}}{5} = 0.4 \rightarrow A = 23^{\circ}34'41''$$

2. Si a = 12cm, b = 16cm i c = 10cm, trobeu A



Aplicant el teorema del cosinus:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow 12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos A \rightarrow$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos A \rightarrow \cos A = \frac{212}{320} = 0.6625 \rightarrow A = 48.51^{\circ}$

1.7. <u>RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE LA SUMA I DIFERÈNCIA DE ANGLES</u>

1.7.1. <u>Suma d'angles</u>

- $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$

Demostració:

Falta gràfic

$$\sin(\alpha+\beta)=A\overline{C}=A\overline{B}+B\overline{C}$$

$$\sin\beta=\frac{B\overline{D}}{O\overline{D}}=B\overline{D} \qquad \cos\beta=\frac{O\overline{B}}{O\overline{D}}=O\overline{B}$$

$$\sin\alpha=\frac{A\overline{B}}{O\overline{B}}=\frac{A\overline{B}}{\cos\beta}\Rightarrow A\overline{B}=\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{B}C}{\overline{B}D}=\frac{B\overline{C}}{\sin\beta}\Rightarrow B\overline{C}=\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

Aleshores:

$$\sin(\alpha+\beta)=A\overline{C}=A\overline{B}+B\overline{C}=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

- $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

<u>Demostració:</u>

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin(90-(\alpha+\beta))=\sin((90-\alpha)+(-\beta))=$$
$$\sin(90-\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(90-\alpha)\cdot\sin(-\beta)=$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

- $$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Demostració:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$

dividim numerador i denominador per cosα·cosβ

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

1.7.2. <u>**Diferència d'angles**</u>

- $$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

Demostració:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

- $$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Demostració:

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

- $$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Demostració:

$$tg(\alpha-\beta)=tg(\alpha+(-\beta))=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha\cdot tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

1.8. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE L'ANGLE DOBLE I L'ANGLE MEITAT

1.8.1. Angle doble

- $$\boxed{\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Demostració:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

- $$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

Demostració:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

- $$\boxed{tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

Demostració:

$$tg2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

1.8.2. Angle meitat

- $$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

Demostració:

(1) $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (2) $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$

Calculem (2) – (1) $\Rightarrow 1-\cos\alpha = 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

- $$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Demostració:

(1) $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (2) $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$

Calculem (1) + (2) $\Rightarrow 1+\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

- $\boxed{tg\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$

Demostració:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{\cancel{2}}}{\frac{1+\cos\alpha}{\cancel{2}}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

1.9. SUMA I DIFERÈNCIA DE SINUS I COSINUS

- $\boxed{\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}}$
- $\boxed{\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}}$
- $\boxed{\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}}$
- $\boxed{\cos A-\cos B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}}$

Demostració:

Demostrarem la primera i les altres es demostren de manera similar

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ (2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

(1) + (2)

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

si a) $\alpha + \beta = A$
si b) $\alpha - \beta = B$

a) + b) $\Rightarrow 2\alpha = A + B \Rightarrow \alpha = \dfrac{A+B}{2}$

a) - b) $\Rightarrow 2\beta = A - B \Rightarrow \beta = \dfrac{A-B}{2}$

1.10. EQUACIONS TRIGONOMÈTRIQUES

S'anomenen equacions trigonomètriques les equacions en les quals apareixen una o varies raons trigonomètriques

Per exemple sin x = 1 ; sin x · cos x = 1, són equacions trigonomètriques.

Per resoldre aquestes equacions convé expressar-les en funció d'un sol angle i d'una sola raó trigonomètrica o be factoritzar-les. Per fer-ho caldrà utilitzar les fórmules adequades que relacionen les raons trigonomètriques.

EXEMPLES

1. Resol l'equació cos x · tg x = $\dfrac{1}{2}$

$$\cos x \cdot tgx = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \\ x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

2. Resol l'equació $-3\sin x + \cos^2 x = 3$

$$-3\sin x + (1 - \sin^2 x) = 3 \rightarrow -\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 3 \rightarrow \sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$$

Es tracta d'una equació de 2n grau on d'incògnita és sin x:

$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

sin x = -1 $\rightarrow$ x = 270º + 360º ·k; k = 0, 1, 2,...

sin x = -2 (No és possible)