

TEMA 2 : Resolució de sistemes d'equacions

Activitats

- (PAU 2003)** Considereu un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites i amb coeficients reals. És possible que el sistema tingui exactament dues solucions?. I exactament tres solucions?. Justifiqueu les respostes.
- (PAU 2001)** Com ha de ser un sistema de tres equacions lineals amb dues incògnites perquè tingui exactament una solució?. Poseu un exemple i trobeu-ne la solució.
- (PAU 1999)** Si el rang d'una matriu d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és 2 i el de la matriu ampliada és 3, què podeu dir d'aquest sistema?. Doneu un exemple de sistema d'aquestes característiques.
- (PAU 2005)** Un sistema conté, entre altres, aquestes dues equacions

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \end{cases}$$

Què podeu dir de les solucions?

- (PAU 2000)** Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

- Afegiu una equació lineal de manera que el sistema obtingut sigui incompatible
 - Afegiu una equació lineal de manera que el sistema obtingut sigui compatible indeterminat. Trobeu-ne les solucions
- (PAU 2007)** Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ -3x + y - 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -12 \end{cases}$$

- (PAU 2005)** Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

8. (PAU 2004) Discutiu i, si escau resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

9. (PAU 2004) La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és la següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- a) El sistema és compatible o incompatible? Raoneu la resposta?
b) En cas que sigui compatible, resoleu-lo

10. (PAU 2003) Considereu el sistema d'equacions següent, en què a és un paràmetre:

$$\begin{cases} ax + y + z = a + 1 \\ 2x - y + az = a + 2 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

Si $x = 1$, $y = -1$ i $z = 2$ n'és una solució, quin és el valor del paràmetre a ?

11. (PAU 2006) Discutiu en funció del paràmetre a el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 5x + y - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{cases}$$

12. (PAU 2000) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquest sistema d'equacions lineals sigui incompatible:

$$\begin{cases} 2x + ay = -a + 5 \\ ax + 8y = 2 \end{cases}$$

13. (PAU 2000) Determineu el valor que ha de tenir el paràmetre a perquè el sistema d'equacions format per $3x + y = 5$, $x - 3y = -5$ i $x + ay = a$ tingui una solució.

14. (PAU 2006) Esbrineu si el sistema d'equacions següent pot ser compatible indeterminat per algun valor del paràmetre m . Esbrineu també si pot ser incompatible

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

15. **PAU 2003**) Per a quin o quins valors del paràmetre λ aquest sistema d'equacions és compatible determinat?

$$\begin{cases} x + 2y + (\lambda + 2)z = 0 \\ x + (2\lambda)y + 3z = 9 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$$

16. **(PAU 2000)** Se sap que el sistema d'equacions següent té més d'una solució:

$$\begin{cases} x + y - az = -2 \\ 2x + y - 8z = -1 \\ -x - 2y + 10z = 5 \end{cases}$$

Calculeu a i indiqueu el conjunt de solucions del sistema

17. **(PAU 1999)** Considereu el sistema d'equacions lineals següent, en què a és un paràmetre:

$$\begin{cases} ax - y = 2 - a \\ 2x - (a + 1)y = 2 \end{cases}$$

- Per a quins valors de a el sistema és compatible determinat?
- Per a quins valors de a el sistema és compatible indeterminat?
- Per a quins valors de a el sistema és incompatible?

18. **(PAU 1998)** Discutiu en funció del paràmetre a el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} ax - y + 2z = 2 - a \\ 2x + 3y - z = -3a \\ x + 2y - z = -2a \end{cases}$$

19. **(PAU 1997)** Considereu el sistema d'equacions lineals següent en què m és un paràmetre:

$$\begin{cases} mx + y = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

- Per a quins valors de m el sistema és incompatible?
- Per a quins valors de m el sistema és compatible indeterminat?

20. **(PAU 2002)** Per a quin o quins valors del paràmetre λ aquest sistema d'equacions és compatible? Resoleu-lo

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \end{cases}$$

21. (PAU 1997) Expliqueu que vol dir que un sistema d'equacions lineals sigui compatible i que vol dir que sigui indeterminat. Pot haver-hi sistemes incompatible i indeterminats alhora?. Digueu, finalment, per a quins valors del paràmetre a el sistema d'equacions següent és indeterminat i per a quins valors és incompatible:

$$\begin{cases} a^2x + y = 0 \\ x + 3y + z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

22. (PAU 2006) Discutiu, en funció del paràmetre m el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

En el cas que sigui possible, doneu-ne també la solució.

23. (PAU 2004) En estudiar un sistema lineal dependent del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array} \right)$$

Discutiu el sistema en funció del paràmetre k .

24. (PAU 2006) Discutiu, en funció del paràmetre a el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

En cas que sigui possible, doneu també la solució

25. (PAU 2004) Discutiu i, si escau, resol aquest sistema segons els valors del paràmetre a :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = a \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

26. (PAU 2007) Discutiu en funció del paràmetre a el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases}$$

Resoleu-lo per al valor de a que el fa indeterminat.

27. (PAU 2006) Discuti, en funció del paràmetre p , el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array} \right)$$

28. (PAU 1999) Per a quin o quins valors del paràmetre a aquest sistema d'equacions és compatible determinat?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 3 \\ 6x - y - z = 4 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

Hi ha algun valor de a per al qual el sistema sigui compatible indeterminat?

29. (PAU 1999) Resoleu el sistema següent per als valors del paràmetre k que el fan compatible:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = k \end{cases}$$

30. (PAU 2006) Considereu el sistema d'equacions lineals següent en què p és un paràmetre:

$$\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1395 \end{cases}$$

- Discuti-lo en funció del paràmetre p
- Resoleu el sistema per a $p = 6$

31. (PAU 2005) De tres nombres, x , y i z , sabem el següent: el primer més el segon sumen 0, el primer més el tercer sumen 1, la suma de tots tres és 0, i el producte del primer per un nombre k més el doble de la suma del segon i el tercer dóna 1.

- Que pots dir del valor k ?
- Quant valen els tres nombres?

32. **(PAU 2007)** Una companyia aèria de baix cost fa vols des de Girona fins a tres ciutats A, B i C. Calculeu el preu del bitllet de cada vol amb la informació següent: si ven 10 bitllets per anar a A, 15 per a B i cap per a C, ingressa 925€; si ven 12 bitllets per a A, 8 per a B i cap per a C, ingressa 760€, i si ven 6 bitllets per a A, 5 per a B i 8 per a C, ingressa 855€.
33. **(PAU 2007)** Tres entitats financeres A, B i C, ofereixen per a dipòsits superiors a 2000€ un interès anual del 2%, el 3% i el $k\%$, respectivament. La Joana, en Martí i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Si tots ho fessin a l'entitat A obtindrien en total uns beneficis de 164€, si la Joana optés per A, en Martí per C i en Dani per B, obtindrien 192€, i si la Joana i en Martí es decidissin per B i en Dani per C, rebrien 218€.
- Escriuiu un sistema d'equacions que descriu les diferents situacions
 - Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida entre tots tres.
 - Trobeu, si existeix, un valor k per als qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per a aquest valor i doneu tres solucions diferents.
34. **(PAU 2002)** En un teatre se representen tres espectacles musicals, que anomenem E_1 , E_2 , E_3 i que tenen un preu diferent. Calculeu el preu de cada espectacle sabent que:
- Si assistíssim dues vegades al E_1 , una vegada a E_2 i una vegada a E_3 , ens costaria 34€.
 - Si anéssim tres vegades al E_1 , una vegada a E_2 , ens costaria 46,5€.
 - En el cas d'assistir només una vegada a cada un dels espectacles, ens costaria 21,5€.
35. **(PAU 2004)** Tenim dues caixes de llibres, A i B. Si passem 12 llibres de A a B, totes dues caixes en tenen el mateix nombre. Però si passem 12 llibres de B a A, la caixa A té el triple de llibres que la B. Quants llibres conté inicialment cada caixa?
36. **(PAU 2004)** A un litre de llimonada que contenia el 25% d'aigua i el 75% de suc de llimona li hem afegit un quart de litre d'aigua. Calculeu el percentatge d'aigua i de suc de llimonada que té ara la llimonada.
37. **(PAU 2004)** Tres germans tenen edats diferents que sumen 37 anys. Sabent que l'edat del gran més el doble del mitjà més el triple del petit dona 69 anys.
- Expresseu l'edat de cada germà en funció de la del petit.
 - És possible que el germà gran petit tingui 5 anys? I 12 anys?. Raoneu les respostes.
 - Calculeu l'edat de tots tres germans.

38. **(PAU 2000)** Dos productes ens han costat 220€. La setmana següent fem la mateixa compra i, com que el primer article està rebaixat el 10% i el segon el 20%, només paguem 186€. Quant haurem de pagar si els preus estan rebaixats el 10% i 20% respectivament, amb relació als de la segona setmana?
39. **(PAU 1997)** El dilluns d'una certa setmana, els articles A, B i C d'uns grans magatzems es rebaixen el 5%, el 6% i el 8%, respectivament. Dimarts, en canvi, es rebaixen el 2%, el 8% i el 6% sobre el preu inicial (no sobre el preu rebaixat el dilluns). Finalment, divendres els rebaixen el 4%, el 7% i el 6% sobre el preu inicial. Si un client que tots tres dies compra una unitat de cadascun d'aquests articles s'estalvia 210€ dilluns, 210 € dimarts i 210€ divendres, quin és el preu per unitat de cada article?
40. **(PAU 1997)** Durant tres dies seguits, tres persones (A, B i C) surten de casa amb una certa quantitat de diners cadascú (la mateixa tots tres dies) i aposten al canòdrom. El primer dia afirmen que A ha perdut el 10% del que portava, B n'ha guanyat el 20% i C n'ha perdut el 50%. La suma de pèrdues i guanys diuen que ha estat de 20€. El segon dia afirmen que A ha guanyat el 20% del que portava, B n'ha guanyat el 40% i C n'ha guanyat el 50% i que la suma de pèrdues i guanys diuen ha estat de 80€. El tercer dia afirmen que A ni ha guanyat ni ha perdut, B ha guanyat el 60% el que portava i C n'ha perdut el 30%, i que la suma de pèrdues i guanys diuen que ha estat de 60€. Pot ser veritat el que diuen?. Raoneu la resposta.
41. **(PAU 2006)** La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54.900€. Hi ha tres categories de treballadors, que indicarem per A, B i C. Un treballador de la categoria A cobra mensualment 900€ mensuals; un de la categoria B, 1.500€, i un de la categoria C, 3.000€. Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir despesa salarial del 5%. Per fer-ho, ha rebaixat el 5% el salari de la categoria A, el 4%, de la B el 7% i de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.