TEMA 2 : Resolució de sistemes d'equacions

2.1. EQUACIÓ LINEAL AMB n INCÒGNITES

- *Una equació lineal de n incògnites* es qualsevol expressió de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, on a i b son nombres reals. Eles valors a_i, s'anomenen *coeficients*, b *terme independent* i x_i , *incògnites.*

- Qualsevol conjunt de n nombres reals que verifiquen l'equació es denomina *solució de l'equació*.

- Dues o més *equacions* són *equivalents* si tenen la mateixa solució

2.2. SISTEMES D'EQUACIÓ LINEAL AMB n INCÒGNITES

2.2.1. DEFINICIONS

- Un *sistema d'equacions lineals* és un conjunt d'expressions algebraiques de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + am_nx_n = b_m \end{cases}$$

on,

- x_j (j = 1,2,....., n) són *incògnites*
- a_{ij} (j = 1,2,....., n), (i = 1,2,....., m) són els *coeficients*
- b_i (i = 1,2,....., m) són els *termes independents*

NOTA

M i n són nombres reals i pot ser $m > n$, $m = n$ o $m < n$. El nombre d'equacions no ha de ser igual al d'incògnites
Quan el nombre d'incògnites es baix es solen designar per les lletres x, y, z , t,...

- Quan $b_i = 0$ per a tot i = 1,2,.............,m, el *sistema* s'anomena *homogeni*

- Qualsevol conjunt de n nombres reals que verifiquen totes les equacions es denomina *solució del sistema d'equacions*

- Dos o més *sistemes d'equacions* són *equivalents* si tenen la mateixa solució

- Obtenim sistemes equivalents per eliminació d'equacions dependents si:

  Tots els coeficients son zeros
  Dues equacions són iguals
  Una equació es proporcional a una altra
  Una equació és combinació lineal d'altres equacions

2.2.2. CRITERIS D'EQUIVALÈNCIA DE SISTEMES D'EQUACIONS

a) Si als dos membres d'una equació d'un sistema se li suma o resta una mateixa expressió els sistema que resulta és equivalent
b) Si multipliquem o dividim els dos membres de les equacions d'un sistema per un nombre no nul, el sistema resultant és equivalent.
c) Si sumem o restem a una equació d'un sistema una altra equació del mateix sistema, el sistema que obtenim és equivalent al donat.
d) Si substituïm una equació per una altra que surt de sumar o restar dues equacions del sistema prèviament multiplicades o dividides per nombres no nuls, el sistema que resulta és equivalent.
e) Si en un sistema es canvia l'ordre de les equacions o l'ordre de les incògnites tindrem un sistema equivalent.

2.3. CLASSIFICACIÓ DE SISTEMES D'EQUACIÓ

Segons el nombre de solucions els sistemes se classifiquen en:

- Sistema Compatible (SC)
  (té solució)
  - Sistema Compatible Determinat (SCD)
    (té una única solució)
  - Sistema Compatible indeterminat (SCI)
    (té infinites solucions)
- Sistema Incompatible (SI)
  (No té solució)

2.4. MATRIU ASSOCIADA A UN SISTEMA D'EQUACIONS

- Donat un sistema de m equacions amb n incògnites, definim la *matriu del sistema* (M), com la matriu formada pels coeficients de les incògnites situats ordenadament

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + am_nx_n = b_m \end{array}\right.$$

$$\text{Matriu del sistema} \rightarrow \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m3} \end{pmatrix}$$

- Definim la matriu ampliada (M') com la matriu formada pels coeficients de les incògnites i els termes independents situats ordenadament.

$$\text{Matriu Ampliada} \rightarrow M' = \left(\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m3} & b_m \end{array}\right)\right)$$

2.5. TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Per saber si un si un sistema de m incògnites i n equacions és compatible determinat, compatible indeterminat o incompatible, només hem de comparar el rang de la matriu dels sistema amb el rang de la matriu de la matriu ampliada:

- Sistema Compatible (SC)
  rang M = rang M'
  - Sistema Compatible Determinat (SCD)
    rang M = rang M'= n (nombre d'incògnites)
  - Sistema Compatible indeterminat (SCI)
    rang M = rang M' < n (nombre d'incògnites)
- Sistema Incompatible (SI)
  rang M ≠ rang M'

2.6. RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS

2.6.1. MÈTODE DE GAUSS

El mètode de Gauss es una generalització de mètode de reducció, consisteix en trobar un sistemes d'equacions equivalents de manera que es vagin eliminant successivament les incògnites fins que només en quedi una. Un cop calculada, se substitueix en les altres equacions per anar trobant el valor de les incògnites restants.

EXEMPLES

1. Resoleu el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 4z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Matriu ampliada → $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Triangularització de la matriu pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \leftrightarrow f_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 = f_3 - 3f_1]{f_2 = f_2 - 5f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 = f_3 - 2f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

rang M = rang M' = 3 = nombre d'incògnites → SCD una única solució

Solució:

f_3→ z = 1

f_2→ -y + 4z = -2 → - y + 4 = - 2 → y = 6

f_1→ x + y – z = 1 → x + 6 – 1 = 1 → x = - 4

2. Resoleu el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 4z + u - v &= -3 \\ x - 2y + z - u + v &= 5 \\ x - 4y + 6z + 2u + v &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Matriu ampliada → $M' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$

Triangularització de la matriu pel mètode de Gauss

$$M' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_1]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=f_3-f_1]{f_2=f_2-2f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=f_3-2f_2]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 31 \end{array}\right)$$

rang M = rang M’ = 3 < nombre d’incògnites → SCI infinites solucions

graus de llibertat = nombre d’incògnites – nombre d’equacions independents = 5 – 3 = 2

Solució:

u = ƛ i v = µ

f_3→ z – 3u + 6v = 31 → z = 31 + 3 ƛ – 6 µ

f_2→ -y + 2z + 3u – 3v = -13 → - y + 62 + 6 ƛ - 12 µ + 3 ƛ – 3µ = - 13 →
y = 75 + 9 ƛ - 15 µ

f_1→ x – 2y + z – u + v = 5 → x - 150 - 18 ƛ + 30 µ + 31 + 3 ƛ – 6 µ - ƛ + µ = 5 →
x = 124 + 16 ƛ - 25 µ

3. Resoleu el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ -2x - y + 5z = 6 \end{array}\right\}$$

Matriu ampliada → $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$

Triangularització de la matriu pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2=f_2-3f_1} \\ \xrightarrow{f_3=f_3-5f_1} \\ \xrightarrow[f_4=f_4+2f_1]{} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4=f_4+f_2]{f_3=f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4=f_4-7f_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

rang M = 3 ≠ rang M’ = 4 → Sistema incompatible (SI) → el sistema no té solució

2.7. <u>DISCUSSIÓ D'UN SISTEMA</u>

Discutir un sistema es determinar si té solució, i en cas de que la tingui saber si és única o no, es a dir determinar si es compatible o incompatible i en cas de ser compatible si és determinat o indeterminat.

2.7.1. <u>DISCUSSIÓ DE SISTEMES PEL MÈTODE DE GAUSS</u>

<u>EXEMPLE</u>

Discutiu el sistema següent en funció del paràmetre m i resoleu-lo quan sigui possible

$$\left.\begin{array}{c} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{array}\right\}$$

Matriu ampliada → $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right)$

Triangularització de la matriu pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{f_3 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & m \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 = f_3 - m f_1]{f_2 = f_2 - f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 = f_3 + f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & -1 & -m^2 - m \end{array}\right)$$

Discussió:
Estudiem els elements de la diagonal principal de la matriu M

m – 1 = 0 → m = 1
Per tant hem de discutir dos casos:

- m ≠ 1
  rang M = rang M' = 3 = nombre d'incògnites → SCD → una única solució

- m = 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Rang M = 2 ≠ rangM' = 3 →sistema incompatible → no té solució

Solució:

$f_3 \rightarrow$ - z = $-m^2 - m$

$f_2 \rightarrow$ (m – 1)y = - m $\rightarrow y = \frac{-m}{m-1}$

$f_1 \rightarrow$ x + y + z = m+1 $\rightarrow$

$x - \frac{m}{m-1} - m^2 - m \rightarrow x = \frac{m}{m-1} + m^2 + m = \frac{m+m^3-m^2+m^2-m}{m-1} = \frac{m^3}{m-1}$ possible error

2.7.2. MÈTODE DE CRAMER

El mètode de Cramer és una manera molt pràctica de resoldre els sistemes compatibles determinats de n equacions amb n incògnites, tot i que, amb ajustaments oportuns, permet resoldre qualsevol sistema compatible.

Considerem un sistema compatible determinat amb n equacions i n incògnites que està representat en aquesta matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{m3} & b_m \end{array}\right)$$

El valor de cadascuna de les incògnites x_i es el quocient entre dos determinats: el corresponent a la matriu del sistema després d'haver-ne substituït la columna i per la columna dels termes independents i el determinat de la matriu del sistema. És a dir:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & a_{m3} & & a_{m3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{m3} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & b_m & a_{m3} & & a_{m3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{m3} \end{vmatrix}};$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & b_m & & a_{m3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{m3} \end{vmatrix}};\ x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & b_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{m3} \end{vmatrix}}$$

EXEMPLE

Sabent que el sistema $\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ x+y+z=4 \\ x-y+z=2 \end{array}\right\}$ és compatible determinat, trobeu la solució aplicant el mètode de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{4}{4}=1;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{4}{4}=1;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{8}{4}=2$$

2.8. RESULUCIÓ DE PROBLEMES

Passos a seguir:

a) Llegir l'enunciat atentament i entendre'l
b) Identificar els valors desconeguts o incògnites
c) Identificar les condicions que han de complir les incògnites i expressar-les en llenguatge algebraic. (plantejar les equacions)
d) Determinar quin tipus de sistema és el del problema (Teorema de Rouché-Frobenius)
e) Resoldre el sistema en cas que sigui compatible
f) Comprovar que la solució del sistema té sentit en l'enunciat del problema i que compleixen les condicions inicials

EXEMPLE

(PAU 1998). Una empresa fabrica tres models de cotxes: A, B i C. El model A ha de passar 20 hores a la unitat de muntatge; el model B n'hi ha de passar 30, i el model C, 10. El model A ha de passar 10 hores a la unitat d'acabats, el model B n'hi ha de passar 20, i el model C, 30. En total, la unitat de muntatge ha funcionat 370 hores, i el d'acabats, 290. Si s'han produït 14 cotxes, quants n'hi ha de cada model?

Solució:

x: nombre de cotxes del model A
y : nombre de cotxes del model B
z: nombre de cotxes del model C

Condicions

Cotxes produïts : x + y + z = 14

Hores de muntatge : 20x + 30y + 10z =370 → 2x + 3y + z = 37

Hores d'acabats: 10x + 20y + 30z = 290 → x + 2y + 3z = 29

El sistema que resulta és: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 14 \\ 2x + 3y + z = 37 \\ x + 2y + 3z = 29 \end{array}\right\}$

Discussió del sistema:

Matriu ampliada → $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 37 \\ 1 & 2 & 3 & 29 \end{array}\right)$

Triangularització de la matriu pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 37 \\ 1 & 2 & 3 & 29 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=f_3-f_1]{f_2=f_2-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=f_3-f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

rang M = rang M' = 3 = nombre d'incògnites → SCD → una única solució

Solució:

f_3→ 3z = 6 → z = 2 → dos cotxes del tipus C

f_2→ y – z = 9 → y – 2 = 9 → y = 11 → onze cotxes del tipus B

f_1→ x + y + z = 14 → x + 11 + 2 = 14 → x = 1 → un cotxe del tipus A