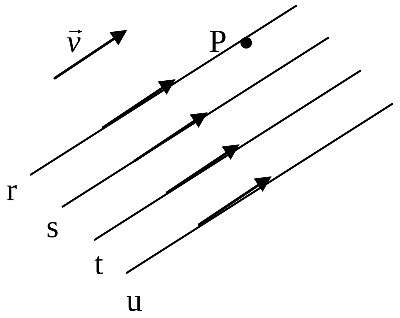
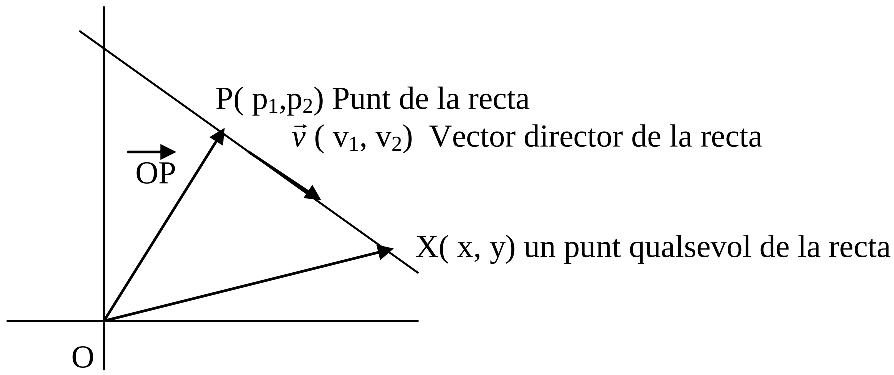
TEMA 3 : Geometria analítica en el pla. Recta

3.7 EQUACIONS DE LA RECTA



Totes les rectes tenen la direcció del vector $\vec{v}$, però només la recta r passa per el punt P.

Per tant un recta que da determinada per un punt i un vector director.



Del dibuix es dedueix que : $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k \cdot \vec{v}$

En coordenades : $\boxed{(x, y) = (p_1,p_2) + k\cdot(v_1, v_2)}$ Equació vectorial de la recta

Desenvolupant:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = p_1 + k\cdot v_1 \\ y = p_2 + k\cdot v_2 \end{array}}$$

Equació paramètrica de la recta

Aïllant la k de totes dues equacions:

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{x - p_1}{v_1} \\ \\ k = \dfrac{y - p_2}{v_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2}}$$

Equació continua de la recta

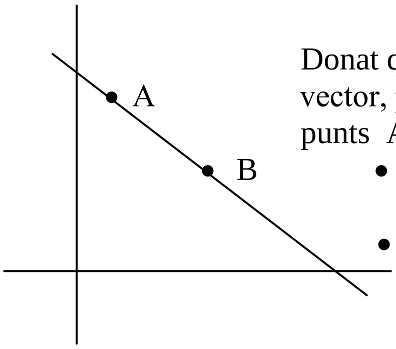
Multiplicant en creu l'expressió anterior i agrupant termes:

$$v_2 \cdot (x - p_1) = v_1 \cdot (y - p_2)$$
$$v_2 \cdot x - v_2 \cdot p_1 = v_1 \cdot y - v_1 \cdot p_2$$
$$\underbrace{v_2 \cdot x}_{A} \underbrace{- v_1 \cdot y}_{B} + \underbrace{v_1 \cdot p_2 - v_2 \cdot p_1}_{C} = 0$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$ <u>Equació general o implícita de la recta</u>

$\vec{v}\,(v_1, v_2) = (-B, A)$ vector director de la recta

3.7.1 <u>Recta que passa per dos punts</u>



Donat que una recta queda determinada per un punt i un vector, per trobar l'equació d'una recta que passa per dos punts A i B simplement:

- Agafem com a punt A o B indistintament
- Agafem com a vector director $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{BA}$

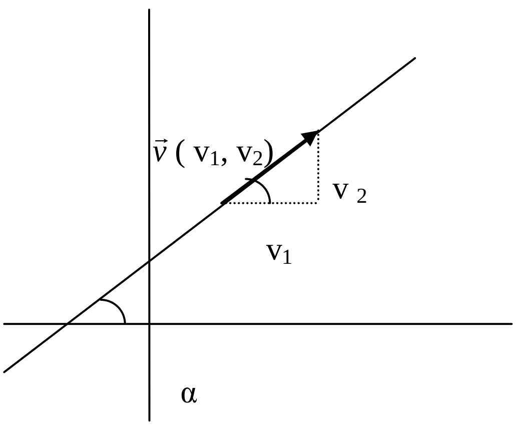
<u>NOTA</u>

Si no ens demanen cap equació en particular, en general cal trobar l'equació general o implícita.

3.7.2. <u>Equació explicita de la recta. Pendent de la recta.</u>

<u>L'equació explicita</u> és aquella que ve donada per l'expressió $\boxed{y = m \cdot x + n}$, on m

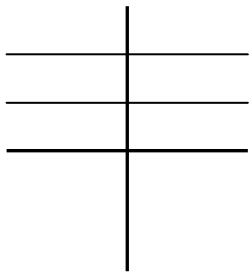
representa la pendent de la recta (inclinació) i n l'ordenada en el origen (on talla la recta a l'eix OY)



Per calcular la pendent:

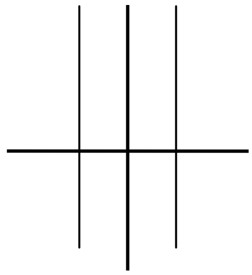
- aïllada la y el que acompanya a l'x
- $m = tg\alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$

3.7.2 Rectes paral·leles als eixos



Recta paral·lela a l'eix OX

$y = b$



Recta paral·lela a l'eix OY

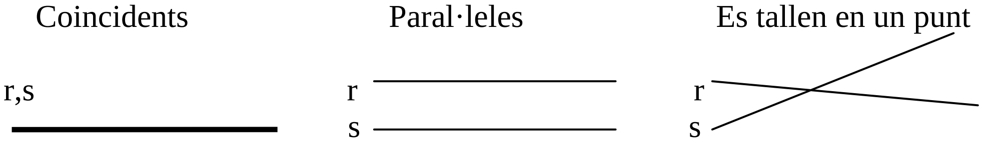
$x = a$

3. 8 POSICIÓ RELATIVA DE DUES RECTES

Donades dues rectes en equació implícita, r : $Ax + By + C = 0$ i s: $A'x + B'y + C' = 0$

Ens podem trobar amb els casos següents:

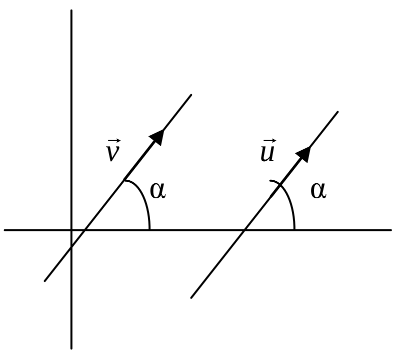
Coincidents — Paral·leles — Es tallen en un punt



El sistema format per les equacions:

Coincidents	Paral·leles	Es tallen en un punt
$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$
te ∞ solucions	no te solució	te 1! Solució
$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

3. 9. PARAL·LELISME DE RECTES



Si dues rectes r i s són paral·lels: r || s

a) Els vectors directors tenen la mateixa direcció

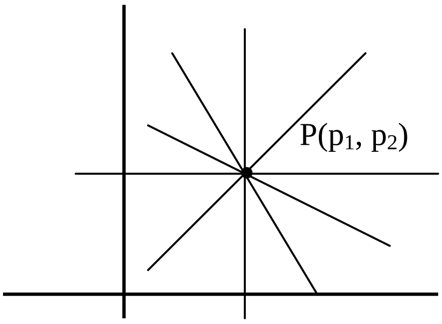
r || s $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \exists k \in R / \vec{v} = k \cdot \vec{u}$

b) Les dues rectes tenen la mateixa pendent $m_r = m_s$

c) Les equacions generals compleixen que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

3.10 FEIX DE RECTES QUE PASSEN PER UN PUNT

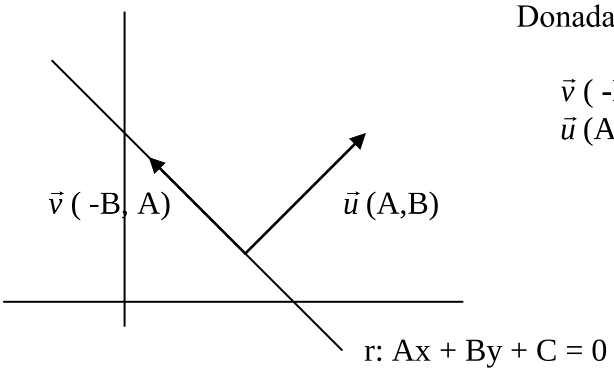


Per un punt passen infinites rectes que formen el feix de rectes d'aquell punt i l'equació del del feix de rectes és

$$\boxed{y - p_2 = m\cdot(x - p_1)}$$

3. 11 RECTES PERPENDICULARS

3.11.1 Vector normal a una recta



Donada la recta d'equació r: Ax + By + C = 0

$\vec{v}$ (-B, A) és vector director de la recta i
$\vec{u}$ (A,B) és vector perpendicular a la recta

EXEMPLE

Donada la recta d'equació r: 3x + y + 5 = 0, trobeu un vector director i un altre normal a la recta

vector director de la recta $\vec{v}$ (-B, A) = (-1, 3)
vector perpendicular a la recta $\vec{u}$ (A,B) = (3,1)

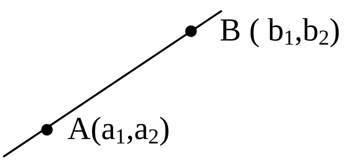
3.11.2. Rectes perpendiculars

a) $r \perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$

b) $r \perp s \Leftrightarrow m_s = \dfrac{-1}{m_r}$

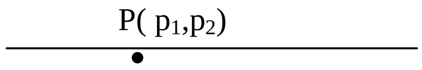
3.12. DISTÀNCIES

3.12.1 Distància entre dos punts

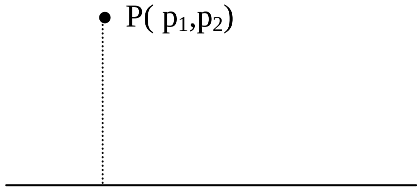


d(A, B) = |AB| = $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

3. 12.2 Distància d’un punt a una recta



Si P $\in$ r $\rightarrow$ d(P , r) = 0

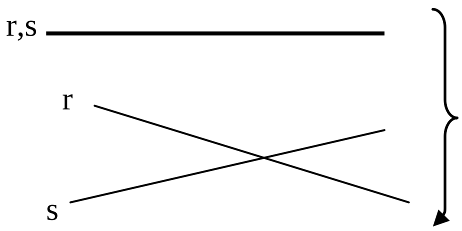


r: Ax + By + C = 0

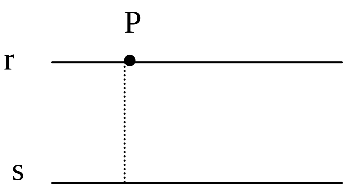
Si P $\notin$ r

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3.12.3 Distància entre dues rectes



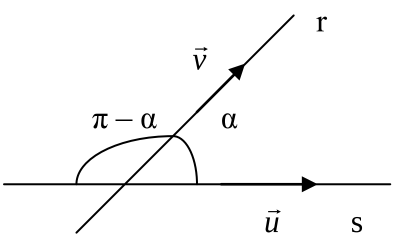
Si les rectos són coincidents o secants la distància Entre les rectes és 0 d(r, s) = 0



Si les rectes són paral·leles:

d(r, s) = d (P, s) , on P és qualsevol punt de la recta r

3.13 ANGLE DE DUES RECTES

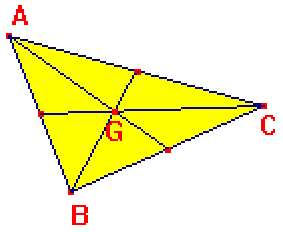


α (r, s) = α ($\vec{v}$, $\vec{u}$)

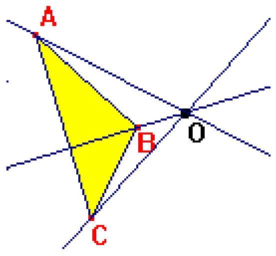
α (r, s) → $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ → α, π - α

3.14 PUNTS NOTABLES D’UN TRIANGLE

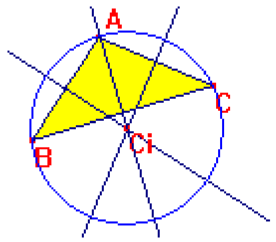
- *Baricentre* d’un triangle és la intersecció de les tres medianes.
  Una *mediana* d’un triangle és la recta que va des d’un vèrtex al punt mitja del costat oposat



- *Ortocentre* d’un triangle és el punt d’intersecció de les tres altures
  Una *altura* es la recta perpendicular a un costat que passa pel vèrtex oposat



- *Circumcentre* d’un triangle és la intersecció de les tres mediatrius
  Una *mediatriu* és la recta perpendicular a un costat pel punt mig



- *Incentre* d’un triangle és la intersecció de les tres bisectrius
  Una *bisectriu* es la recta que divideix cada angle en dos d’iguals