TEMA 3 : Geometria analítica en el pla. Vectors

3.1 VECTORS

3.1.1 Magnituds escalars i magnituds vectorials

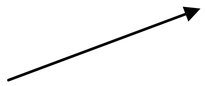
- La magnitud escalar és aquella que queda determinada per un nombre
- La magnitud vectorial és aquella que no queda determinada per un nombre, cal especificar la direcció i el sentit.

EXMPLES

El temps, el pes,... són magnituds escalars
La força, és una magnitud vectorial.

3.1.2 Vectors

a) Un vector és un segment orientat



B (b_1, b_2) extrem

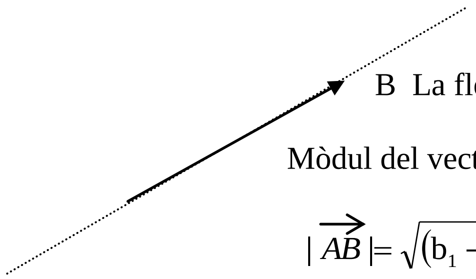
$\overrightarrow{AB}$

A (a_1, a_2) origen

b) Components d'un vector : Coordenades del extrem – coordenades de l'origen

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$$

c) Mòdul, direcció i sentit d'un vector



B La fletxa indica el sentit

Mòdul del vector és la longitud el segment AB

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

A La direcció del vector ve determinada per la recta que el conté

d) Vector equipol·lents són aquells que tenen la mateixa direcció, mòdul i sentit (tenen les mateixes components)

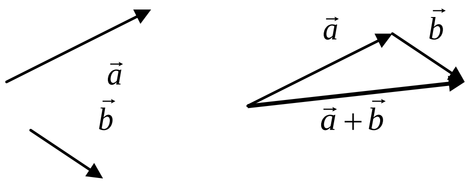
e) Un vector és fix quan el seu origen (A) i el seu extrem (B) són coneguts, es representen per $\overrightarrow{AB}$

f) Un vector és lliure si només es coneix les components, no l'origen ni l'extrem, es representa amb una lletra minúscula $\vec{v}$

3.2 OPERACIONS AMB VECTORS

3.2.1 Suma de vectors

Gràficament



En components :

$\vec{a}$ (a_1 , a_2) $\vec{b}$ (b_1 , b_2)

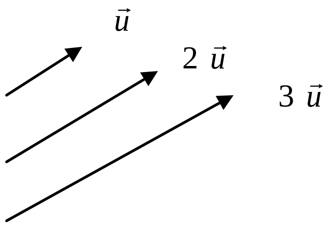
$\vec{a}+\vec{b}$ = ($a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$)

Propietats :

- Commutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}?$
- Vector neutre o nul: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- Vector oposat : $-\vec{u}$: és un vector amb el mateix mòdul mateixa direcció i sentit contrari

  $\vec{u}$ (u_1 , u_2) $\rightarrow$ $-\vec{u}$ ($-u_1$, $-u_2$)

3.2.2 Producte d'un vector per un nombre



El producte d'un nombre k per un vector $\vec{u}$ és un altre vector k · $\vec{v}$ que presenta:

- La mateixa direcció que $\vec{v}$
- Si k > 0 el mateix sentit que $\vec{v}$
- Si k < 0 sentit contrari que $\vec{v}$
- $|k \cdot \vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$ (k vegades el mòdul de $\vec{v}$)
- Components: $k \cdot \vec{v}$ = ($k \cdot v_1$. $k \cdot v_2$)

3. 3 BASE DE VECTORS DEL PLA

3.3.1 Combinació lineal de vectors

- Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents si tenen la mateixa direcció, es a dir, si existeix un nombre k tal que

  $\vec{u} = k \cdot \vec{v} \rightarrow$ les seves components són proporcionals
  $(u_1, u_2) = (k \cdot v_1 ; k \cdot v_2)$.
  Quan dos vector no tenen la mateixa direcció es diu que són linealment independents.

- Si existeixen dos nombre reals n i m tal que : $\vec{w} = n \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v}$, diem

  que el vector $\vec{w}$ és combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$

3.3.2 Base de Vectors en el pla

Diem que un conjunt de vectors és una base si :

- Són linealment independents
- Qualsevol vector es pot posar com a combinació lineal d'aquests vectors

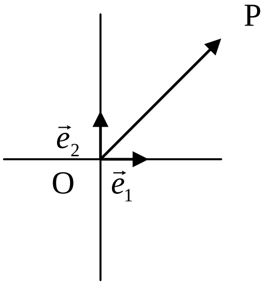
NOTA

En el pla una base sempre està formada per dos vectors linealment independents.

3.3.3 Components d'un vector en una base

Fixada una base B = { $\vec{u}$, $\vec{v}$ }, qualsevol vector w es pot expressar com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$: existeixen m , n nombres reals tal que : $\vec{w} = n \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v}$. Els nombres m i n s'anomenen components del vector en aquesta base.

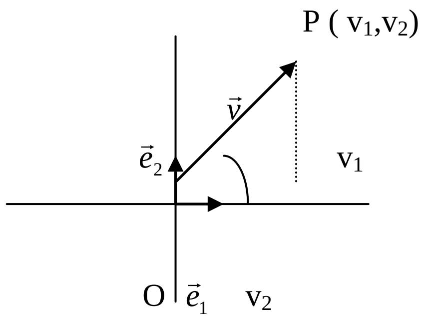
3.3.4 Sistema de Referència ortonormal



Fixem un punt del pla com origen de coordenades O(0, 0)
Base de vectors B = { $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ }dos vector perpendiculars i de mòdul
El conjunt {O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ } és un sistema de referència ortonormal.

$\overrightarrow{OP}$ s'anomena vector de posició del punt P

3. 4. MÒDUL I ARGUMENT D'UN VECTOR



$\overrightarrow{OP} = \vec{v}\ (v_1, v_2)$

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Argument:

$\alpha \rightarrow tg\alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$

$v_1 = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

$v_2 = |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$

NOTA

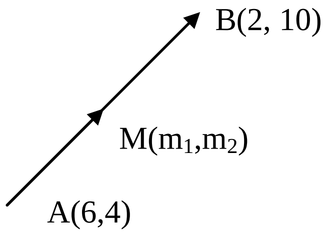
Si el vector $\vec{v}$ no és unitari, $\vec{w} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ és un vector unitari amb la mateixa direcció i sentit que $\vec{v}$

3.5 APLICACIONS GEOMETRIQUES DELS VECTORS

3.5.1 Divisió d'un segment amb parts iguals

EXEMPLES

a) Trobeu el punt M, que divideix el segment d'extrems A(6, 4) i B(2, 10) en dos parts iguals.

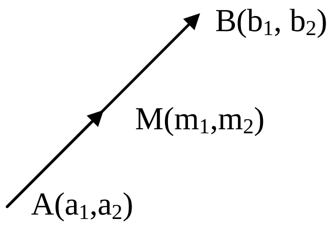


$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$

$(-4, 6) = 2 \cdot (m_1 - 6\ ,\ m_2 - 4)$

$$\begin{cases} -4 = 2\,m_1 - 12 \rightarrow m_1 = 4 \\ 6 = 2\,m_2 - 8 \rightarrow m_2 = 7 \end{cases}$$

Punt mig d'un segment

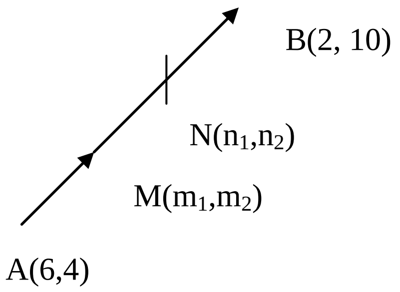


$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$

$(b_1 - a_1\ ,\ b_2 - a_2) = 2 \cdot (m_1 - a_1\ ,\ m_2 - a_2)$

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 2\,m_1 - 2 \cdot a_1 \rightarrow m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ b_2 - a_2 = 2\,m_2 - 2 \cdot a_2 \rightarrow m_2 = \dfrac{a_2 + b_{21}}{2} \end{cases}$$

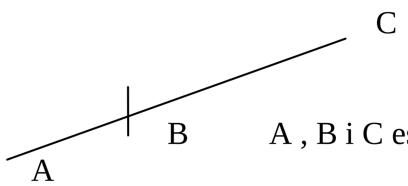
b) Trobeu els punts M i N , que divideix el segment d’extrems A(6, 4) i B(2, 10) en tres parts iguals.



$$\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AM}$$

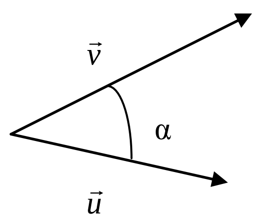
$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AN}$$

3.5.2. <u>Punts alineats</u>



A , B i C estan alineats $\leftrightarrow \ \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\ \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

3. 6 <u>PRODUCTE ESCALAR DE VECTORS</u>



Donat dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ anomenen producte escalar de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ al <u>nombre</u> que resulta de:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

3.6.1 <u>Teorema</u>

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors no nuls tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

<u>Demostració:</u>

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \\ |\vec{u}| \neq 0 \neq |\vec{v}| \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^{\circ} \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\Leftarrow \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 = 0$$

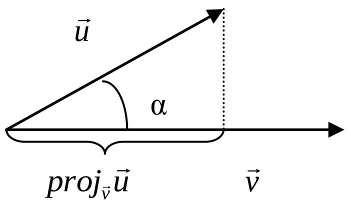
3.6.2 **Propietats del producte escalar** v_2

a) Commutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
b) Associativa del producte de un nombre : $\alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$
c) Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3.6.2 **Expressió analítica del producte escalar**

En una base ortonormal si $\vec{u}(u_1,u_2)$ i $\vec{v}(v_1,v_2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

3.6.3 **Projecció ortogonal d'un vector sobre un altre**



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{proj_{\vec{v}}\vec{u}}{|\vec{u}|} \rightarrow proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{proj_{\vec{v}}\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

NOTA

Si $\vec{v}(a, b) \rightarrow \vec{u}(-b, a)$ es ortogonal a $\vec{v}$, ja que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (-b, a) = -a \cdot b + a \cdot b = 0$

3.6.4 **Angle de dos vectors**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$