TEMA 4 : Equacions Exponencials i Logarítmiques

4.1. EQUACIONS EXPONENCIALS

4.1.1. Definició

Equacions exponencials són aquelles en les quals hi ha una incògnita en l'exponent:

Exemples:

$a) 3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

$b) 5^{x^2-5x+6} = 1$

$c) 2^x + 2^{x+1} = 12$

4.1.2 Resolució d'equacions exponencials

Exemples:

$a) 3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \rightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-3} \rightarrow 1 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$b) 5^{x^2-5x+6} = 1 \rightarrow 5^{x^2-5x+6} = 5^0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow x = 2; x = 3$

$c) 2^x + 2^{x+1} = 12 \rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^1 = 12 \rightarrow a = 2^x \rightarrow a + 2a = 12 \rightarrow 3a = 12 \rightarrow a = 4 \rightarrow$
$2^x = 4 \rightarrow x = 2$

4. 2. LOGARITMES

4.2.1. Definició de logaritme

- Si a > 0, s'anomena logaritme en base a de p i es designa $\log_a p$, l'exponent al qual cal elevar a per obtenir p.

$$\boxed{\mathrm{Log}_a\, p = x \leftrightarrow a^x = p}$$

Exemples:

a) $\log_2 8 = 3$, ja que $2^3 = 8$

b) $\log_5 25 = 2$, ja que $5^2 = 25$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ja que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- Si la base a = 10 es tracta d'un logaritme decimal i es designa simplement per log p.

- Si la base és a = e = 2.7182818.... es tracta d'un logaritme neperià i es designa per ln p

4.2.2. Propietats dels logaritmes

1. $\log_a a = 1$

2. $\log_a 1 = 0$

3. $\log_a (p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$

4. $\log_a \left(\frac{p}{q}\right) = \log_a p - \log_a q$

5. $\log_a p^n = n \cdot \log_a p$

6. canvi de base :

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

4.3. EQUACIONS LOGARÍTMIQUES

4.3.1 Definició

Equacions logarítmiques són aquelles en les quals hi ha una incògnita dintre d'un logaritme:

Exemples:

a) $\log x + \log 4x = 2$
b) $\log (x + 1) + \log (x - 1) = \log 3$

4.3.2 Resolució d'equacions logarítmiques

Per resoldre les equacions logarítmiques s'han de seguir els passos següents:

- Deixar els logaritmes en la mateixa base
- Deixar un únic logaritme en les dues bandes de la igualtat
- Eliminar les logaritmes a les dues bandes i resoldre l'equació sense logaritmes
- Si en una banda de la igualtat no hi ha logaritmes, aplicar la definició per transformar-la amb una potencia
- Comprovar els resultats obtinguts, ja que es poden obtenir resultats que no siguin solució de l'equació inicial

EXEMPLES

a) $\log x + \log 4x = 2$

Aplicant propietats de logaritmes:

$\log(x \cdot 4x) = 2 \rightarrow \log 4x^2 = 2$

Aplicant definició de logaritme

$4x^2 = 10^2 \rightarrow 4x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

Comprovació

Només es solució $x = 5$, ja que $\log(-5)$ no existeix

b) $\log(x + 1) + \log(x - 1) = \log 3$

Aplicant propietats de logaritmes:

$\log[(x + 1)(x - 1)] = \log 3$

Eliminat logaritmes

$(x + 1)(x - 1) = 3$

$x^2 - 1 = 3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Comprovació

Només es solució $x = 2$, ja que $\log(-1)$ i $\log(-3)$ no existeixen

4.4. FUNCIÓ EXPONENCIAL

4.4.1 Definició

Una funció exponencial de base a és la funció que a cada valor x li fa correspondre a^x, on a és un nombre real positiu:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow a^x$$

EXEMPLE

$$f(x) = 2^x \rightarrow \begin{cases} f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ f(0) = 2^0 = 1 \\ f(1) = 2^1 = 2 \\ f(2) = 2^2 = 4 \end{cases}$$

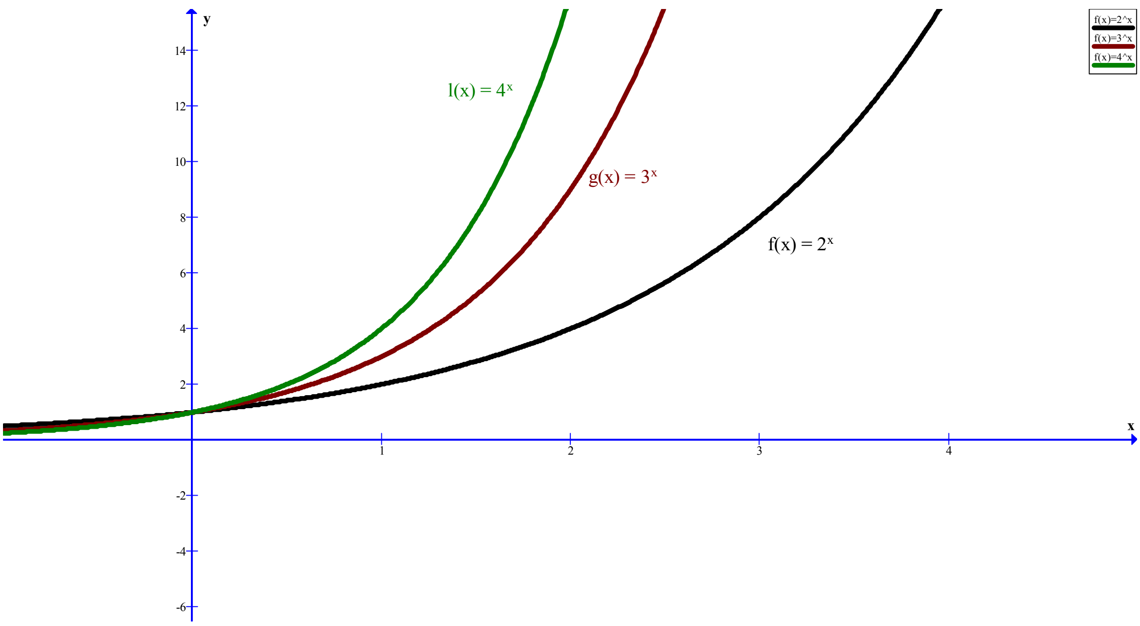
En general parlarem de funció exponencial quan la incògnita o indeterminada es troba en l'exponent.

NOTA

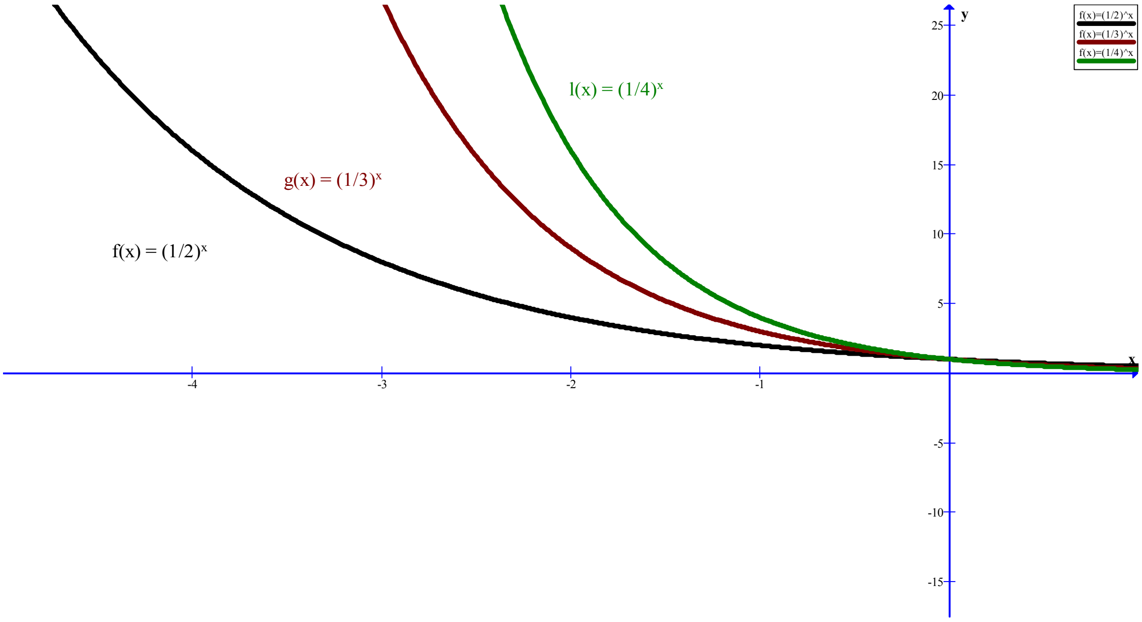
No hi ha que confondre una exponencial amb una potència x^n , en aquest cas la incògnita es troba en la base

4.4.2 Representació gràfica

a > 1



0 < a < 1



4.4.2 Característiques

- Per qualsevol valor de x real sempre es pot calcular a^x . El domini de la funció són tots els valors reals
- Per a qualsevol valor de x real sempre obtindrem un valor positiu de a^x. El recorregut de la funció són tots els valors reals positius
- No talla mai a l'eix OX i talla a l'eix OY en (0,1)
- Si $a > 1 \rightarrow$ la funció es sempre creixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim
- Si $0 < a < 1 \rightarrow$ la funció es sempre decreixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim

4.5. FUNCIÓ LOGARITMICA

4.4.1 Definició

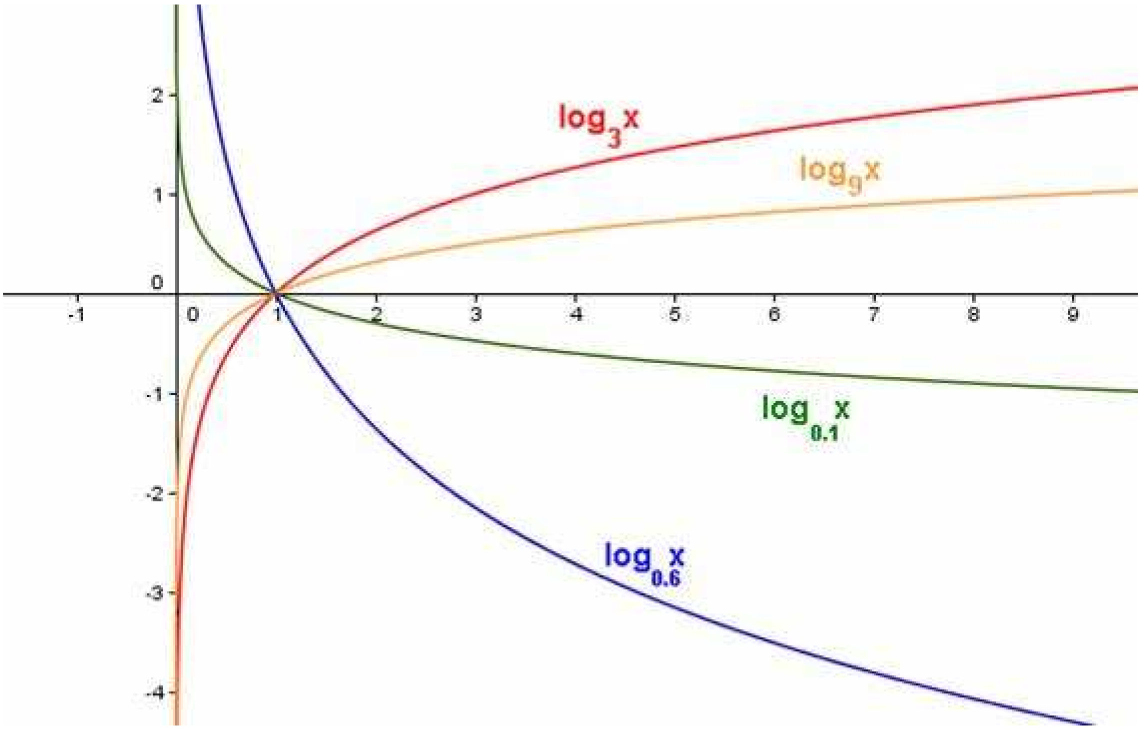
Una funció exponencial de base a és la funció que a cada valor x li fa correspondre $\log_a x$, on a és un nombre real positiu:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \log_a x$$

EXEMPLE

$$f(x) = log_2 x \rightarrow \begin{cases} f(16) = log_2 16 = 4 \\ f(8) = log_2 8 = 3 \\ f(4) = log_2 4 = 2 \\ f(2) = log_2 2 = 1 \\ f(1) = log_2 1 = 0 \end{cases}$$

4.4.2 Representació gràfica



4.4.2 Característiques

- Només podem calcular log_a x per a valors positius de la incògnita . El domini de la funció són tots els valors reals positius
- log_a x pot prendre qualsevol valor real. El recorregut de la funció són tots els valors reals
- No talla mai a l'eix OY i talla a l'eix OX en (1,0)
- Si a > 1 → la funció es sempre creixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim
- Si 0 < a < 1 → la funció es sempre decreixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim