TEMA 4 : Programació lineal

4.1. <u>SISTEMES D' INEQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB DUES INCÒGNITA</u>

La solució d'aquest sistema és l' intersecció de les regions que correspon a la solució de cadascuna de les inequacions

EXEMPLE

Trobeu la solució gràfica del sistema d'inequacions amb dues incògnites següent:

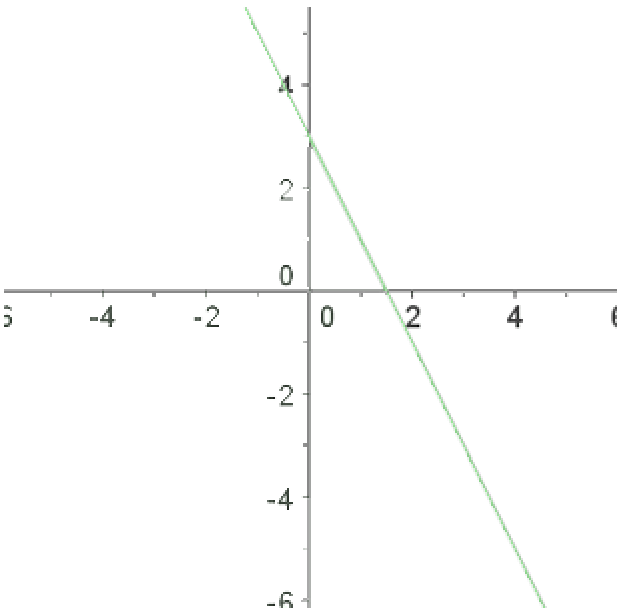
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

1. Representem gràficament la regió solució de la primera inequació

- Transformem la desigualtat en igualtat $2x + y = 3$
- Representem la recta que obtenim de la igualtat (nomes cal obtenir dos punts que compleixen l'equació)

$$x = 0 \rightarrow 0 + y = 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow P_1(0,3)$$

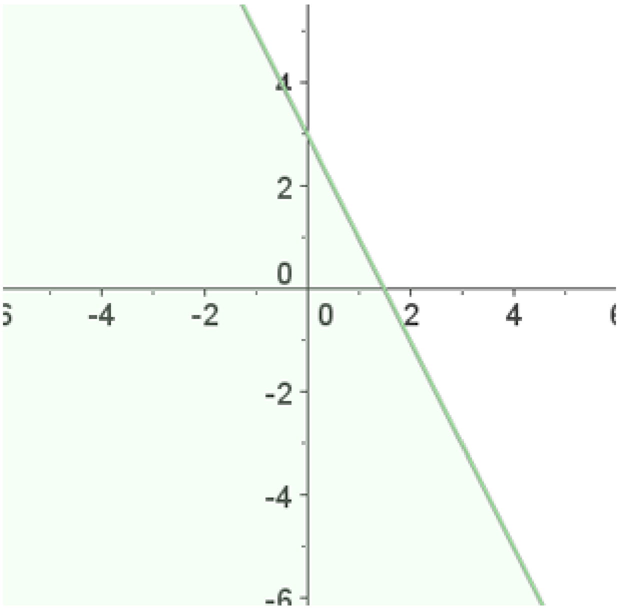
$$x = 1 \rightarrow 2 + y = 3 \rightarrow y = 1 \rightarrow P_2(1,1)$$



- Prenem qualsevol punt que no pertany a la recta, per exemple (0,0) i el substituïm en la desigualtat. Si la compleix, la solució es el semiplà on es troba aquest punt, en cas contrari la solució serà l'altre semiplà

$2x + y \leq 3$

$2 \cdot 0 + 0 \leq 3 \rightarrow$ la desigualtat $0 \leq 3$ és certa

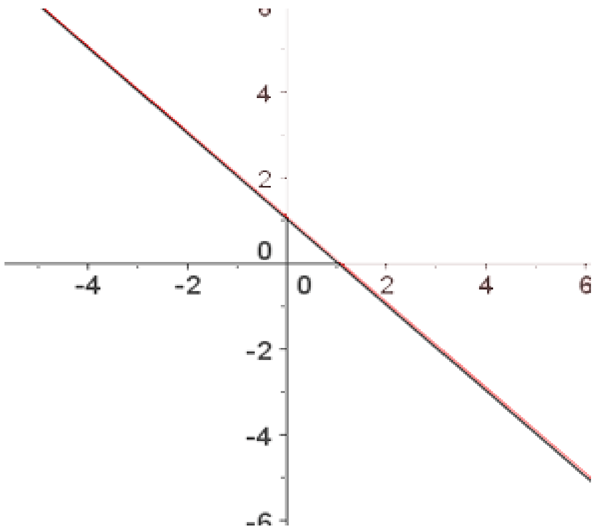


2. Representem gràficament la regió solució de la segona inequació

- Transformem la desigualtat en igualtat $x + y = 1$
- Representem la recta que obtenim de la igualtat (nomes cal obtenir dos punts que compleixen l'equació)

$x = 0 \rightarrow 0 + y = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow Q_1(0,1)$

$x = 1 \rightarrow 1 + y = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow Q_2(1,0)$

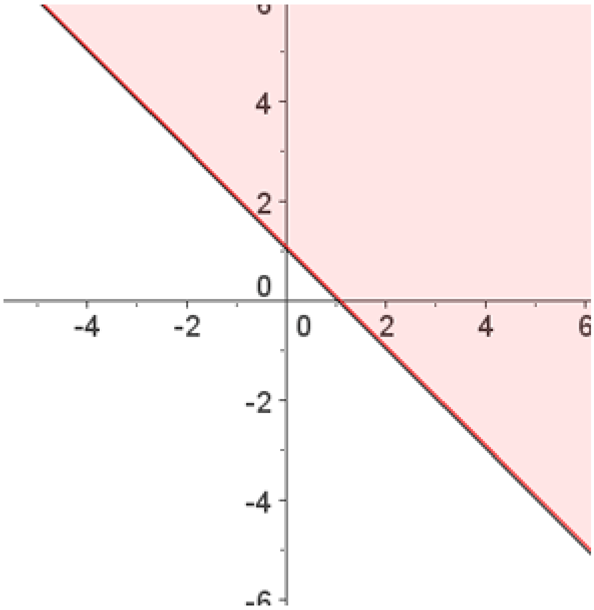


;

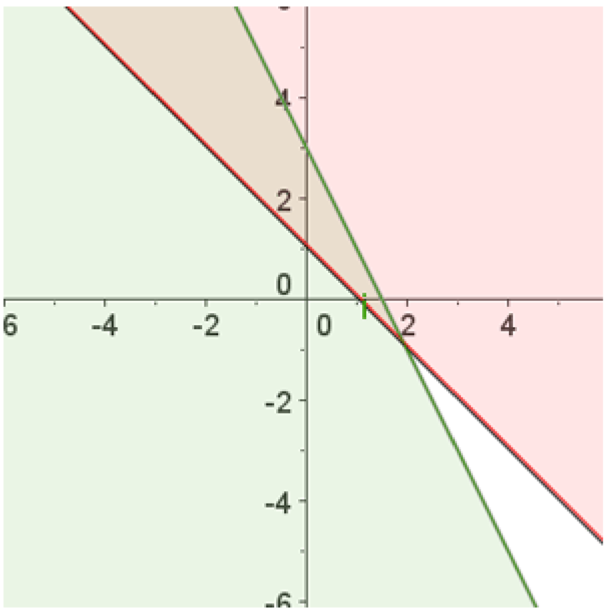
- Prenem qualsevol punt que no pertany a la recta, per exemple (0,0) i el substituïm en la desigualtat. Si la compleix, la solució es el semiplà on es troba aquest punt, en cas contrari la solució serà l'altre semiplà

  $x + y \geq 1$

  $0 + 0 \geq 1 \rightarrow$ la desigualtat $0 \geq 1$ no és certa



3. La solució és l' intersecció de les regions solucions



4.2. PROGRAMACIÓ LINEAL

4.2.1 Definició de conceptes bàsics

- Un problema de programació lineal de dues variables consisteix en optimitzar (fer màxima o mínima) una funció lineal amb dues variables. La funció que cal optimitzar s'anomena **funció objectiu** i és de la forma $f(x,y) = ax + by + c$

- Les variables x i y estan sotmeses a algunes **restriccions**, les quals es poden expressar mitjançant inequacions lineals d'aquestes mateixes variables.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

  (les restriccions tant poden ser ≤ com ≥)

- El conjunt intersecció de tots els semiplans format per les restriccions, determina un recinte acotat o no, que rep el nom de **regió factible** o **regió solució**

- El conjunt dels vèrtex del recinte es denomina conjunt de **solucions factibles** o **bàsiques** i el vèrtex on se presenta el valor màxim o mínim de la funció, segons si la funció es vol maximitzar o minimitzar respectivament, s'anomena **solució òptima**

- El valor que pren la funció objectiu en el vèrtex de la solució òptima s'anomena **valor de la programació lineal**

4.2.2 Resolució de problemes

Per platejar i resoldre problemes de programació lineal, heu de seguir els següents passos:

1. Llegir l'enunciat atentament i entendre'l
2. Reconèixer els valors desconeguts, es a dir escollir les incògnites
3. Determinar la funció que cal optimitzar. Escriure la funció objectiu
4. Identificar les restriccions a les que estan sotmeses les incògnites, i expressar-les en forma de sistema d'inequacions
5. Trobar la regió factible o regió solució, representant en un mateix gràfic totes les restriccions
6. Esbrinar el conjunt de solucions factibles, determinat els vèrtex de la regió factible.
7. Calcular el valor de la funció objectiu en cadascun dels vèrtex per veure quin d'ells representa el valor màxim o mínim (depenent del que demana el problema). Cal tenir present la possibilitat de que no hi hagi solució si el recinte no està acotat

EXEMPLE

a) Uns grans magatzems encarreguen a un fabricant pantalons i samarretes de deport

El fabricant disposa per la confecció de 750m de teixit de cotó i 1000m de teixit de poliester. Cada pantalons necessita 1m de cotó i 2m de poliester. Per cada samarreta es gasten 1.5m de cotó i 1m de poliester.

El preu de venda dels pantalons es fixa en 50€ i el de les samarretes en 40€. Quin nombre de pantalons i samarretes ha de donar el fabricant als grans magatzems per tal que aquests aconsegueixin un benefici màxim?

Solució:

1. Elecció de les incògnites:

   x = nombre de pantalons
   y= nombre de samarretes

2. Funció objectiu: $f(x,y) = 50x + 40y$ cal maximitzar-la

3. Restriccions

   Per tal de escriure les restriccions ens ajudem d'una taula

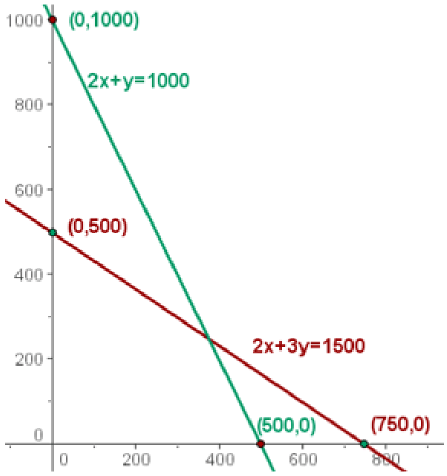
	Pantalons	Samarretes	Disponible
Cotó	1	1.5	750
Poliester	2	1	1000

$$\begin{cases} x + 1.5y \le 750 \rightarrow 2x + 3y \le 1500 \\ 2x + y \le 1000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

4. Regió factible o solució

Donat què $x \geq 0$ i $y \geq 0$ treballarem només en el primer quadrant

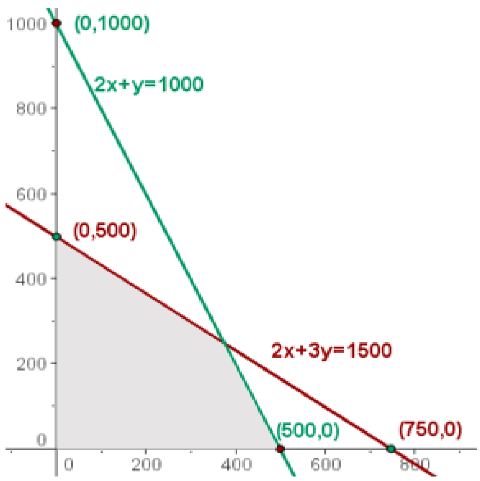
	$2x + 3y = 1500$	$2x + y = 1000$
$x = 0$	$y = 500 \rightarrow P_1(0, 500)$	$y = 1000 \rightarrow Q_1(0, 1000)$
$y = 0$	$x = 750 \rightarrow P_2(750, 0)$	$x = 500 \rightarrow Q_2(500, 0)$



Prenem qualsevol punt que no pertany a la recta, per exemple (0,0) i el substituïm en la desigualtat. Si la compleix, la solució es el semiplà on es troba aquest punt, en cas contrari la solució serà l'altre semiplà

	$2x + 3y \leq 1500$	$2x + y \leq 1000$
O(0,0)	$2\cdot0 + 3\cdot0 \leq 1500 \rightarrow$ és certa	$2\cdot0 + 0 \leq 1000 \rightarrow$ és certa

La zona d'intersecció de les solucions de les inequacions serà la regió factible o regió solució.

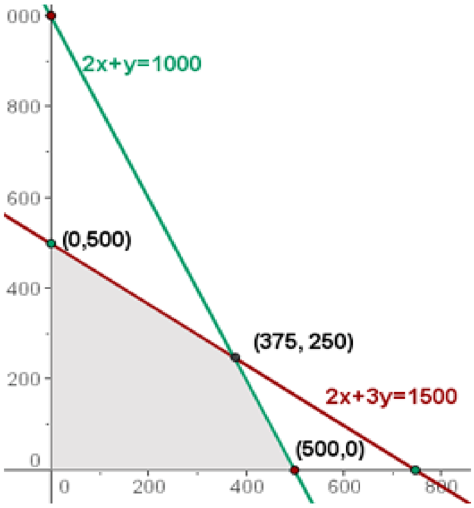


5. Calcular les coordenades dels vèrtex de la regió factible

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=1500\\ x=0\end{array}\right\} \rightarrow y = 500 \rightarrow V_1(0{,}500)$$

$$\left.\begin{array}{r}2x+y=1000\\ y=0\end{array}\right\} \rightarrow x = 500 \rightarrow V_2(500{,}0)$$

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=1500\\ 2x+y=1000\end{array}\right\} \rightarrow x = 375;\ \ y = 250 \rightarrow V_3(375{,}250)$$



6. Càlcul de la solució òptima

   La solució òptima, si es única es troba en un d'aquests vèrtex, substituïm aquest tres punts en la funció objectiu per tal de veure en quin d'ells obtenim un màxim benefici.
   Funció objectiu $f(x,y) = 50x + 40y$

$$f(0{,}500) = 50 \cdot 0 + 40 \cdot 500 = 20000€$$

$$f(500{,}0) = 50 \cdot 500 + 40 \cdot 0 = 25000€$$

$$f(375{,}250) = 50 \cdot 375 + 40 \cdot 250 = 28750€ \rightarrow \textbf{Màxim}$$

La solució òptima és fabricar 375 pantalons i 250 samarretes per obtenir un màxim benefici de 28750€

La solució no sempre és única, també podem trobar-nos amb una solució múltiple

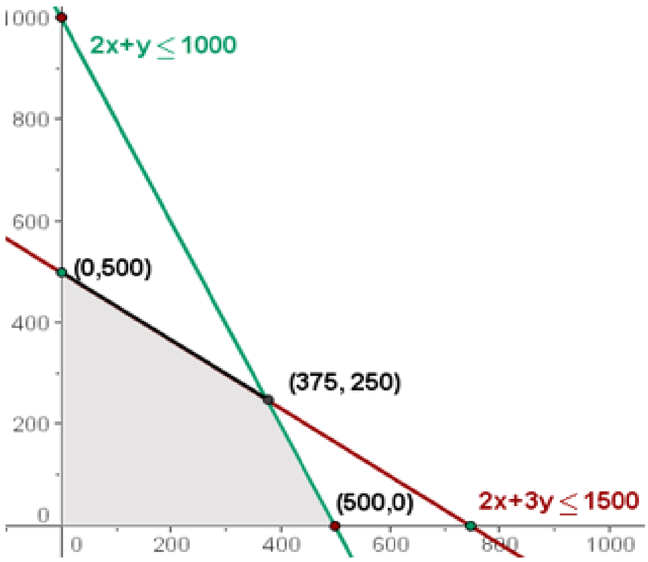
Per exemple, si la funció objectiu de l'exercici anterior fos $f(x,y) = 20x + 30y$

$$f(0{,}500) = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 500 = 15000€ \rightarrow \textbf{Màxim}$$

$$f(500{,}0) = 20 \cdot 500 + 30 \cdot 0 = 10000€$$

$$f(375{,}250) = 20 \cdot 375 + 30 \cdot 250 = 15000€ \rightarrow \textbf{Màxim}$$

En aquest cas tots els parells, amb solució natural , del segment marcat amb negre serien màxims i per tant solució del problema.



Per exemple el punt P (300, 300) → $f(300{,}300) = 20 \cdot 300 + 30 \cdot 3000 = 15000€$ també es un **Màxim**

b) En una granja de pollastres es dóna una dieta per engreixar, amb una composició mínima de 15 unitats d'una substancia A i altres 15 d'una substancia B. En el mercat només es troben dos classes de compostos: El tipus X amb una composició d'una unitat de A i cinc de B, i un altre tipus Y, amb una concentració de cinc unitats de A i una de B. El preu del tipus X és de 10€ i el del tipus Y és de 30€. Quina quantitat s'han de comprar de cada tipus per tal de cobrir les necessitats amb un cost mínim?

Solució:

1. Elecció de les incògnites:
   x = nombre d'unitats del tipus X
   y = nombre d'unitats del tipus Y

2. Funció objectiu: $f(x, y) = 10x + 30y$ cal maximitzar-la

3. Restriccions
   Per tal de escriure les restriccions ens ajudem d'una taula

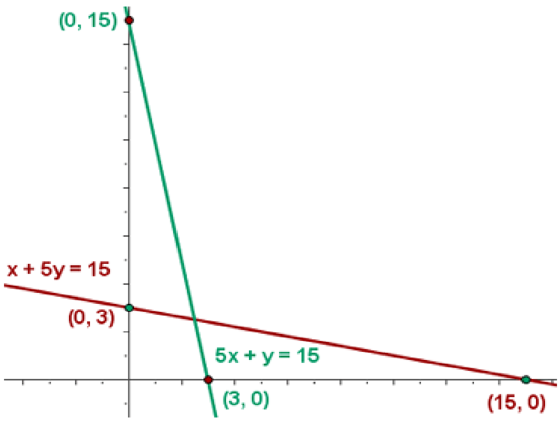
	X	Y	Mínim
A	1	5	15
B	5	1	15

$$\begin{cases} x + 5y \geq 15 \\ 5x + y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4. Regió factible o solució

   Donat què $x \geq 0$ i $y \geq 0$ treballarem només en el primer quadrant

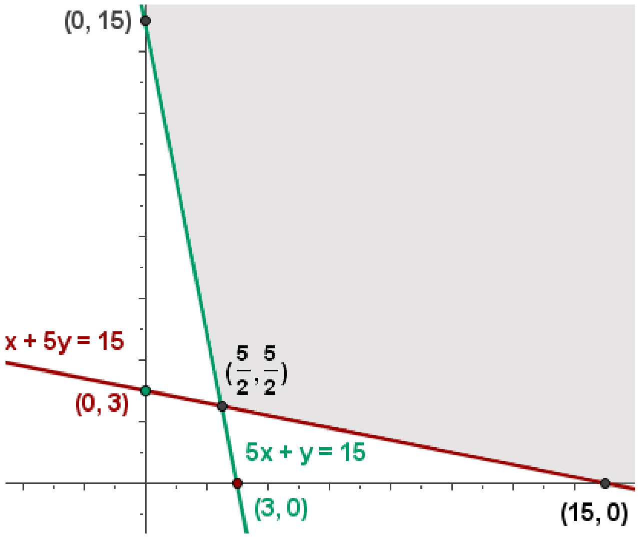
	$x + 5y = 15$	$5x + y = 15$
$x = 0$	$y = 3 \rightarrow P_1(0, 3)$	$y = 10 \rightarrow Q_1(0, 15)$
$y = 0$	$x = 15 \rightarrow P_2(15, 0)$	$x = 3 \rightarrow Q_2(3, 0)$



Prenem qualsevol punt que no pertany a la recta, per exemple (0,0) i el substituïm en la desigualtat. Si la compleix, la solució es el semiplà on es troba aquest punt, en cas contrari la solució serà l'altre semiplà

	$x + 5y \geq 15$	$5x + y \geq 15$
O(0,0)	$0 + 5 \cdot 0 \geq 15 \rightarrow$ no és certa	$5 \cdot 0 + 0 \geq 15 \rightarrow$ no és certa

La zona d'intersecció de les solucions de les inequacions serà la regió factible o regió solució.



5. Calcular les coordenades dels vèrtex de la regió factible

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= 15 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = 15 \rightarrow V_1(0,15)$$

$$\left.\begin{aligned} x + 5y &= 15 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 15 \rightarrow V_2(15,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= 15 \\ x + 5y &= 15 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{5}{2};\ y = \frac{5}{2} \rightarrow V_3(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$$

7. Càlcul de la solució òptima

Donat que la regió factible no està acotada haurem d'estudiar el comportament de la funció.

Representem sobre un mateix gràfic les següents funcions

$10x + 30y = 0$

$10x + 30y = 40$

$10x + 30y = 80$

$10x + 30y = 120$

A la vista del comportament de la funció objectiu la solució òptima es troba en el punt $V_3(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

En aquest cas el cost mínim és: $f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = 10 \cdot \frac{5}{2} + 30 \cdot \frac{5}{2} = 100€$