TEMA 5 : Funcions

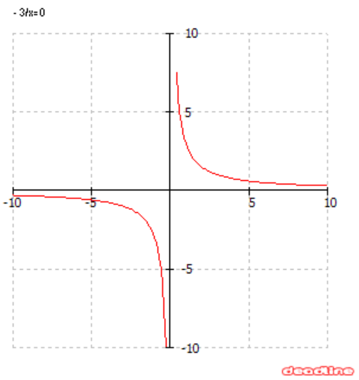
5.1. INTRODUCCIÓ

Les diferents ciències coneixen, des de fa temps, lleis que descriuen relacions entre magnituds, de manera que coneixent-ne el valor d'alguna s'obté, inequívocament, el valor de l'altra, Va ser aquest tipus de relacions el que va servir d'origen al concepte de funció.

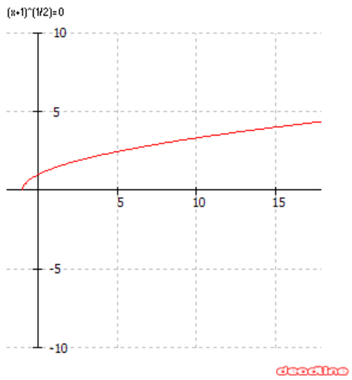
EXEMPLES:

Assigna a cada gràfica la seva equació:

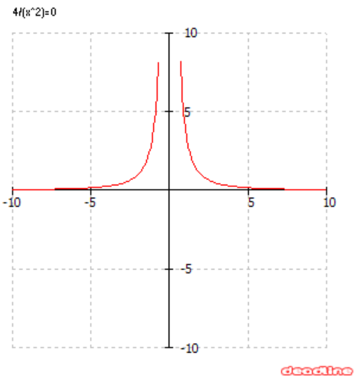
a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$



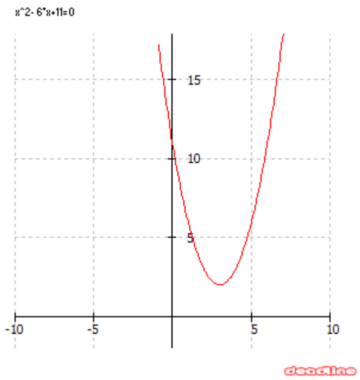
b) $f(x) = \sqrt{x+1}$



c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$



d) $f(x) = x^2 - 6x + 11$



5.2. CONCEPTE DE FUNCIÓ

f és un a funció de $\Re$ en $\Re$ si a cada nombre real $x \in D \subseteq \Re$ li fa correspondre un altre valor real f(x):

$$f: \quad D \subseteq \Re \longrightarrow \Re$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

- El conjunt D: valors que pot prendre la variable independent x. S'anomena *domini de la funció.*
- El conjunt de valors que pot prendre la funció (variable dependent) s'anomena *recorregut*
- f(x) és únic per a cada valor $x \in D$
- Com que tant la variable x com la funció f(x) pren valors reals aquestes funcions s'anomenen *funcions reals de variables reals.*

EXEMPLES

1. f: $D \longrightarrow \Re$

$x \longrightarrow x + 3$

$-1 \longrightarrow f(-1) = -1 + 3 = 2$

$0 \longrightarrow f(0) = 0 + 3 = 3$

$1 \longrightarrow f(1) = 1 + 3 = 4$

.....

2. g: $D \longrightarrow \Re$

$x \longrightarrow +\sqrt{x}$

$0 \longrightarrow f(0) = +\sqrt{0} = 0$

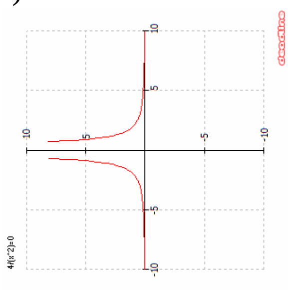
$1 \quad f(1) = +\sqrt{1} = 1$

....

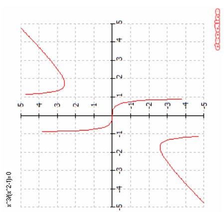
$\nexists$ f(-1)

3.

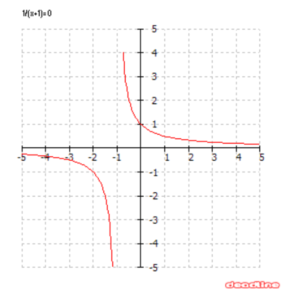
a)



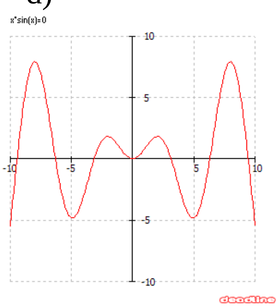
b)



c)



d)



a) , b) no són funcions ja que algun valor de la x li corresponen més d'un valor de la y

c) , d) són funcions ja que a cada valor de x li correspon un únic valor de la y.

- Imatge d'una funció: és el valor que pren la funció per a un determinat valor de la variable independent (valor de la "y" coneguda la "x")

- Antiimatge d'una funció: és el valor que ha de prendre la variable independent per obtenir un cert valor de la variable dependent (valor de la "x" coneguda la "y") es designa per $f^{-1}(x)$

<u>EXEMPLES</u>

Donada la funció $f(x) = -2x + 3$:

a) Calculeu la imatge de -3, 0 i 2

$f(-3) = -2\cdot(-3) + 3 = 6 + 3 = 9$
$f(0) = -2\cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$
$f(2) = -2\cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -2$

a) Calculeu l'antiimatge de -1, 3 i 5

$-1 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 + 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow f^{-1}(-1) = 2$
$3 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 - 3 \rightarrow x = 0 \rightarrow f^{-1}(3) = 0$
$5 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 - 5 \rightarrow x = -1 \rightarrow f^{-1}(5) = -1$

5.3. <u>CARACTERÍSTIQUES GENERALS DE LES FUNCIONS</u>

5.3.1. <u>Domini de definició d'una funció. Recorregut</u>

S'anomena *domini de definició d'una funció* f, i es designa per D(f) o simplement D, al conjunt de valors x per als quals existeix la funció, es a dir, per als quals hi ha f(x).

Raons per els quals el domini de definició pot restringir-se:

a) Context real del qual s'ha extret la funció
Si es parla d'àrea mai la funció mai podrà prendre valors negatius
Si es tracta de l'edat de persones el domini quedarà restringit ([0, 110]

b) Per voluntat de qui ha proposat la funció
c) Impossibilitat de realitzar algunes operacions amb alguns valor de x
- Denominadors que s'anul·len
- Arrels d'índex parell de nombres negatius
- Logaritmes de nombres negatius ....

<u>NOTA</u>

- Si y = polinomi o exponencial $\rightarrow$ D(y) = $\Re$
- Si $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$ D(y) = $\Re$ - {x$\in \Re$ / g(x) = 0}
- Si $y = \sqrt[n]{f(x)}$, n parell $\rightarrow$ D(y) = {x$\in \Re$ / g(x) $\geq$ 0}
- Si y = logf(x) $\rightarrow$ D(y) = {x$\in \Re$ / g(x) > 0}

<u>EXEMPLES</u>

Quin es el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{1}{x+3} \rightarrow$ D(y) = $\Re -$ {-3}, ja que el denominador s'anul·la en x = -3

b) $y = \sqrt{x-2} \rightarrow$ x – 2 $\geq$ 0 $\rightarrow$ x $\geq$ 2 $\rightarrow$ D(y) = [2, + ∞]

c) Volum del cub: v = $l^3 \rightarrow$ v $\geq 0 \rightarrow$ l $\geq 0 \rightarrow$ D(v) = [0, + ∞]

d) y = 2x + 5 x $\in$ [1, 4] $\rightarrow$ D(y) = [1, 4], per voluntat de que posa l'enunciat.

El conjunt de valors que pot prendre la funció (variable dependent) s'anomena *recorregut*, i es designa per R(f)

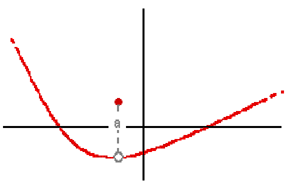
5.3.2. <u>**Continuïtat**</u>

- Les funcions la gràfica de les quals no es pot dibuixar sense aixecar el llapis del full s'anomenen *funcions discontinues*. Els punts en que necessariament s'ha d'aixecar el llapis del full s'anomenen *punts de discontinuïtat* .

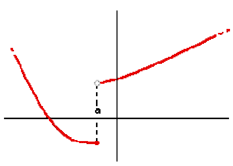
- Les funcions amb una gràfica tal que la podem dibuixar sense aixecar el llapis del full s'anomenen *funcions continues*.

- <u>Tipus de discontinuïtat</u>:

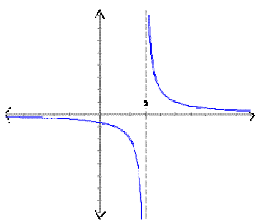
    - Discontinuïtat evitable
    - Discontinuïtat de salt
    - Discontinuïtat asimptòtica



evitable



salt

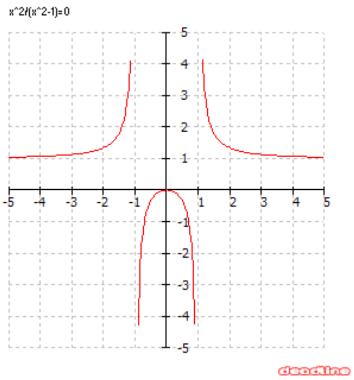


asimptòtica

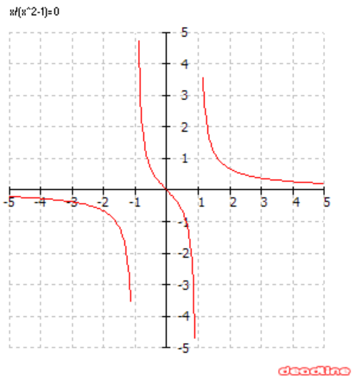
5.3.3. <u>Simetria</u>

- Direm que una funció és *parell* si és simètrica respecte a l'eix d'ordenades, en aquest cas f(-x) = f(x)
- Direm que una funció és *senar* si és simètrica respecte a l'origen de coordenades, en aquest cas f(-x) = -f(x)

Gràficament:



Funció parell



Funció senar

5.3.4. <u>Punts de tall amb els eixos de coordenades</u>

- Si un punt talla a l'eix d'abscisses $\rightarrow$ y = 0, P(x,0)
- Si un punt talla a l'eix d'ordenades $\rightarrow$ x = 0, P(0,y)

5.3.5. <u>Creixement i decreixement. Màxims i Mínims</u>

- Direm que una funció f(x) és *creixent* entre x = a i x = b, si la gràfica no baixa mai entre a i b, es a dir:

  F creixent en (a, b) $\leftrightarrow$ si c, d $\in$ (a,b) / c < d $\rightarrow$ f(c) $\leq$ f(d)

  Si f(c) < f(d) direm que la funció és *estrictament creixent*

- Direm que una funció f(x) és *decreixent* entre x = a i x = b, si la gràfica no puja mai entre a i b, es a dir:

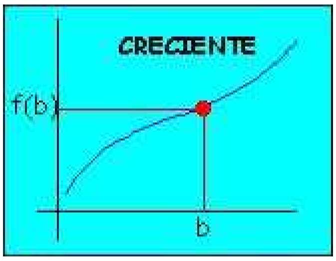
  F decreixent en (a, b) $\leftrightarrow$ si c, d $\in$ (a,b) / c < d $\rightarrow$ f(c) $\geq$ f(d)

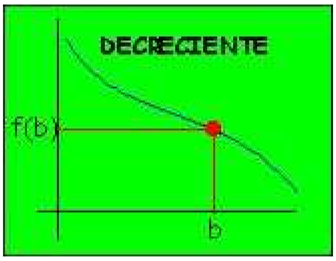
  Si f(c) > f(d) direm que la funció és *estrictament decreixent*

- Direm que una funció f(x) és constant entre x = a i x = b si la gràfica entre aquest dos valors ni puja ni baixa, es a dir:

  F constant en (a, b) $\leftrightarrow$ si c, d $\in$ (a,b) $\rightarrow$ f(c) = f(d)

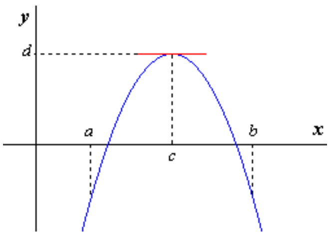
Gràficament



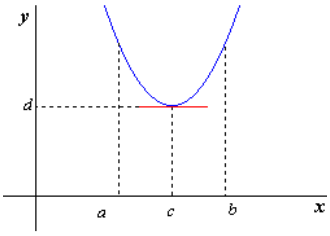


- Direm que en x = c f(x) assoleix un *màxim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de creixent a decreixent.
- Direm que en x = c f(x) assoleix un *mínim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de decreixent a creixent.

Gràficament



en c de creixent a decreixent



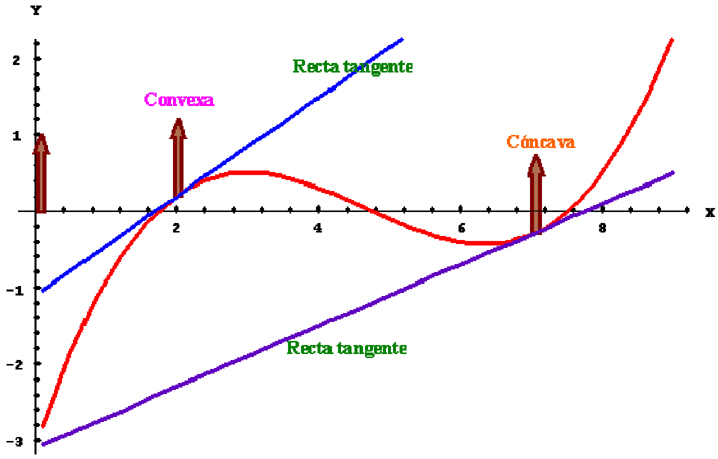
en c de decreixent a creixent

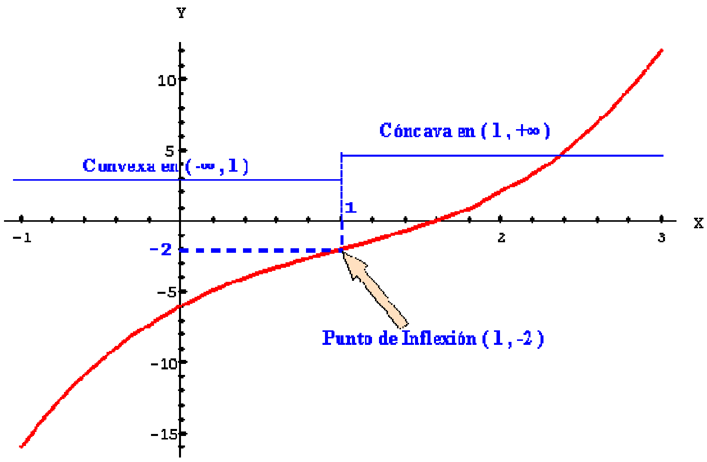
- Els màxims i mínims relatius s'anomenen *extrems relatius* de la funció

5.3.6. Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.

- Una funció es *còncava* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sota de la gràfica.
- Una funció es *convexa* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sobre de la gràfica.
- El punt en que la gràfica d'una funció passa de ser còncava a convexa o al contrari s'anomena punt d'inflexió. En aquest punt la tangent travessa la gràfica.

Gràficament:





5.4. ALGUNES FUNCIONS IMPORTANTS

5.4.1. Funció de proporcionalitat directa o lineal i funció afí

a)La funció de proporcionalitat directa o lineal és de la forma $y = mx$, on m pot ser qualsevol nombre real.

Té les característiques següents:

- El domini i recorregut són tots els nombres reals
- La seva representació gràfica és una recta
- Passa per l'origen de coordenades
- m és la pendent, si $m > 0$ la funció és creixent en cas què $m < 0$ la funció és decreixent

b)La funció afí és de la forma $y = mx + n$, on mi n poder ser qualsevol nombre real.

Té les característiques següents:

- El domini i recorregut són tots els nombres reals
- La seva representació gràfica és una recta
- n és l'ordenada en l'origen, es a dir, el punt on la funció talla a l'eix d'ordenades
- m és la pendent, si $m > 0$ la funció és creixent en cas què $m < 0$ la funció és decreixent

NOTA:

Per representar aquestes funcions hi ha prou amb fer una taula de valors

5.4.2. Funció quadràtica

La funció quadràtica és de la forma $y = ax^2 + bx + c$, on a, b i c són nombres reals i $a \neq 0$.

Té les característiques següents:

- El domini són tots els nombres reals
- La seva representació gràfica és una paràbola
- Si $a > 0$ la paràbola es còncava, i si $a < 0$ la paràbola es convexa
- Pot tallar al eix d'abscisses dues vegades, una o cap (depèn si l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ té dues, una o cap solució)
- Sempre talla a l'eix d'ordenades en (0, c)
- El vèrtex de la paràbola $V(x_v, y_v)$:
  $x_v = \frac{-b}{2a}$, per calcular y_v només cal trobar la imatge de x_v

5.4.3. Funció de proporcionalitat inversa

La funció de proporcionalitat inversa és de la forma $y = \frac{a}{x}$, , on a, és un nombre real

Té les característiques següents:

- El domini és $\mathbb{R} - \{0\}$
- La seva representació gràfica és una hipèrbola
- Si $a > 0$ és decreixent, i si $a < 0$ és creixent
- No talla mai als eixos de coordenades

5.5. COMPOSICIÓ DE FUNCIONS

Donades dos funcions *f: A* → *B* i *g: B* → *C*, on la imatge de *f* està continguda en el domini de *g*, es defineix la funció composició (*g* o *f*): *A* → *C* com **(*g* o *f*)(*x*) = g(*f*(*x*))**

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & B & \to & C \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

f: R → *R* x $\to \frac{1}{x}$

g: R → *R* x → $\sqrt{x}$

Aleshores

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \xrightarrow{g} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

EXEMPLES

1. Si f(x) = x + 3 i g(x) = $\frac{3x}{x+2}$, trobeu

a) $(g \circ f)(4) = g\left[f(4)\right] = g[7] = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

b) $(g \circ f)(-2) = g\left[f(-2)\right] = g[1] = \frac{3}{3} = 1$

c) $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g[x+3] = \frac{3(x+3)}{x+3+2} = \frac{3x+9}{x+5}$

NOTA

- L'expressió (*g* o *f*)(*x*) es llegeix f composta amb g
- En general $g(f(x)) \neq f(g(x))$
- La funció I : x $\longrightarrow$ x rep el nom de *funció identitat*

5.6. FUNCIÓ RECIPROCA O INVERSA

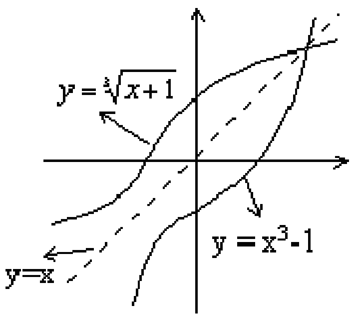
- S'anomena funció reciproca o invers de *f* una altra funció que es designa per f^{-1} que compleix la condició següent
  - Si f (a) = b ↔ f^{-1} (b) = a

- Les funcions f i f^{-1} verifiquen que :

$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x) \leftrightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = I(x) \leftrightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

I(x) funció identitat

- Les gràfiques de f i f^{-1} són simètriques respecte a la recta y = x



NOTA

Per calcular f^{-1} cal intercanviar la variable x per y (y = f(x) → x = f(y)) i aïllar la y de l'expressió

EXEMPLES

Trobeu la funció reciproca de la funció $f(x) = x^3 - 6$ i comproveu que el resultat és correcte

$f(x) = x^3 - 6 \rightarrow x = y^3 - 6 \rightarrow x + 6 = y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{x+6} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$

Comprovació

- $(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\sqrt[3]{x+6}\right] = \left[\sqrt[3]{x+6}\right]^3 - 6 = x + 6 - 6 = x$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left[f\ (x)\right] = f^{-1}\left[x^3 - 6\right] = \left[\sqrt[3]{x^3 + 6 - 6}\right] = \sqrt[3]{x^3} = x$

5.7. FUNCIÓ DEFINIDA A TROSSOS

- Les *funcions definides a trossos* són aquelles que dones diverses fórmules, cadascuna de les quals regeix el comportament de la funció en un tram determinat

EXEMPLE

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b)

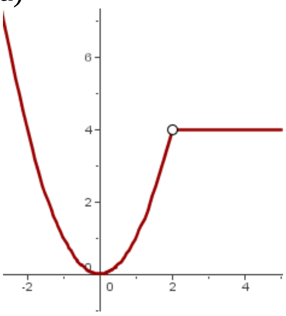
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x+6 & si \quad 3 < x \leq 6 \\ 0 & si \quad 6 < x \end{cases}$$

- La seva representació gràfica és senzilla si sabem representar cadascuna i es fa atenció al seu comportament en els punts d'enllaç de cada tram.

EXEMPLE

Representeu gràficament les funcions definides a trossos anteriors

a)



b)