TEMA 5 : Límits de funcions. Continuïtat

5.1. LÍMIT D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

5.1.1. Conceptes bàsics

a)

- $x \rightarrow c$ significa que x pren valors cada vegada més pròxims a c. Es llegeix "x tendeix a c"

  $x \rightarrow 1$: 2; 1.9; 1.8; .....1, 00001; 0.9; 0.99; 0.999............

- $x \rightarrow c^-$ significa que x pren valors cada vegada més pròxims a c, però tots menors que c . Es llegeix "x tendeix a c per l'esquerra"

  $x \rightarrow 1^-$: 0; 0.1; 0.5; 0.9; 0.99; 0.999............

- $x \rightarrow c^+$ significa que x pren valors cada vegada més pròxims a c, però tots majors que c . Es llegeix "x tendeix a c per la dreta"

  $x \rightarrow 1^+$: 2; 1.9; 1.8; .....1, 00001; ....

b)

- Significat de $\lim_{x \to c^-} f(x)$: és el comportament de la funció f(x) quan $x \rightarrow c^-$ i es llegeix límit de f(x) quan x tendeix a c per l'esquerra.

EXEMPLE

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

x	0	0.9	0.99	0.999	......
f(x) = $\frac{1}{(x-1)^2}$	1	100	10000	1000000	....

Quan x tendeix a 1^- la funció tendeix a $+\infty$

- Significat de $\lim_{x \to c^+} f(x)$: és el comportament de la funció f(x) quan $x \rightarrow c^+$ i es llegeix límit de f(x) quan x tendeix a c per la dreta.

EXEMPLE

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	......
f(x) = $\frac{1}{(x-1)^2}$	100	10000	1000000	100000000	....

Quan x tendeix a 1^+ la funció tendeix a + ∞

Els límits $\lim_{x\to c^-} f(x)$ i $\lim_{x\to c^+} f(x)$, s'anomenen *límits laterals* de la funció f(x)

- Significat de $\lim_{x\to c} f(x)$ és el comportament de la funció quan x s'aproxima a c sense importar si és per la dreta o per l'esquerra. Es llegeix límit de f(x) quan x tendeix a c.

Si $\exists \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = l \Rightarrow \exists \lim_{x\to c} f(x) = l$

Si $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to c} f(x)$

5.2. CÀLCUL DE LÍMITS

5.2.1. Límit de funcions si x → a

a) Funcions polinòmiques

Com que les funcions polinòmiques són sempre contínues $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, per calcular el límit, trobem el valor de la funció en el punt.

EXEMPLES

1. $\lim_{x\to 2} \left(x^3 - x^2 - 4x\right)$ = 2^3 -2^2 – 4·2 =8 – 4 – 8 = - 4

b) Funcions racionals:

$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, pot passar:

a$_1$) Q(a) $\neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

a$_2$) Q(a) = 0 , llavors poden presentar-se dos casos:

a$_{21}$) P(a) $\neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

a$_{22}$) P(a) = 0 $\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminació

Això vol dir que els dos polinomis són divisibles per (x – a) cal factoritzar (per Ruffinni) i simplificar, i tornar a calcular el límit.

EXEMPLES

1. $\lim_{x \to 3} \frac{4x+2}{x^2+1} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3^2+1} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

2. $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{0} = \pm\infty \to \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ Indeterminació, cal factoritzar els polinomis

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1) \cdot (x - 1)$

$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$

c) Funcions irracionals

Atesa que una funció en que apareix un radical, podem tenir una indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$,que resoldrem multiplicant i dividint per l'expressió conjugada

EXEMPLE

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

5.2.2. Límit de funcions si x → ±∞

a) Funcions polinòmiques

Calcular aquest límit és equivalent a calcular el límit del terme de major grau, ja que comparativament en el infinit la resta de termes són molt més petits i els podem depreciar.

EXEMPLES

1. $\lim_{x\to -\infty}\left(-x^3-3x^2+x+3\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$
2. $\lim_{x\to +\infty}\left(-x^3-3x^2+x+3\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$

b) Funcions racionals: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació, que es resol aplicant el següent criteri:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n\cdot x^n+\dots a_1x+a_0}{b_m\cdot x^m+\dots b_1x+b_0}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si n > m (± depèn dels coeficients)}\\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si n = m}\\ 0 & \text{si n < m}\end{cases}$$

EXEMPLES

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}=+\infty$, ja que grau P(x) = 3 > 2 = grau Q(x), i $\dfrac{+}{+}=+$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}=-\infty$, ja que grau P(x) = 3 > 2 = grau Q(x), i $\dfrac{-}{+}=-$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^3-1}=\dfrac{3}{5}$, ja que grau P(x) = 3 = grau Q(x)

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{5x^5-1}=0$ ja que grau P(x) = 3 < 5 = grau Q(x)

NOTA

Si la funció ve expressada com una suma (diferència) de fraccions algebraiques , podem tenir una indeterminació de la forma ∞ - ∞ que resoldrem operant i aplicant el criteri anterior.

EXEMPLE

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2}-\dfrac{x^2-1}{x}\right)=\infty-\infty$ Indeterminació

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2}-\frac{x^2-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+5x-2x^2+2}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+2}{2x}\right)=\frac{5}{2},$$

ja que grau P(x) = 1 = grau Q(x)

c) Funcions irracionals

En aquest cas podem trobar una indeterminació del tipus $\infty-\infty$, que resoldrem igual que en el cas anterior

EXEMPLE

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty\to\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-x}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0$$

ja que grau P(x) = 0 < $\dfrac{1}{2}$ = grau Q(x)

5.2.3. **Límit de funcions del tipus** $(f(x))^{g(x)}$

Tan si x → a, com si x → $\pm\infty$ es poden presentar diferents casos:

- La base tendeix a qualsevol nombre no nul i l'exponent a un altre nombre

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (f(a))^{g(a)}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x))^{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)}$$

EXEMPLE

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)^{2x-3} = (1+1)^{2\cdot 1-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x-5}{x}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\frac{3}{1}} = 3^3 = 27$

- La base tendeix a un nombre major que 1 i l'exponent a $+\infty$. En aquest cas el límit es també $+\infty$

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{+\infty} = 3^{+\infty} = +\infty$$

- La base tendeix a un nombre entre -1 i 1 i l'exponent a $+\infty$. En aquest cas el límit es també 0

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

- La base tendeix a un nombre menor que -1 i l'exponent a $+\infty$. En aquest cas el límit no existeix, ja que el signe del resultat alternarà en funció de que el exponent sigui parell o senar

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}}=\left(\frac{-6}{2}\right)^{+\infty}=(-3)^{+\infty}=\nexists$$

- La base tendeix 1 i l'exponent a $+\infty$. En aquest cas tindrem una indeterminació 1^{∞} que resoldrem mitjançant la següent fórmula:

$$\lim_{\substack{x\to\pm\infty\\ x\to a}}\left(f(x)\right)^{g(x)}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty\\ x\to a}}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}}=\left(\frac{2}{2}\right)^{+\infty}=1^{\infty}\ \text{Indeterminació}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}-1\right)\cdot\frac{3x^2-5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5-2x^2}{2x^2}\right)\cdot\frac{3x^2-5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x^2+25}{2x^3}\right)}=e^{0}=1$$

5.3. <u>Relació de la continuïtat i el límit d'una funció en un punt.</u>

- Una funció f(x) és *continua* en un punt x = c sí

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

Es a dir:
f és continua en x = c si es compleixen les tres condicions següents:

a) $\exists\ \lim\limits_{x\to c}f(x)$
b) $\exists$ f(c)
c) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$

- Una funció és continua si ho és en tots els punts del seu domini. En cas contrari la funció és discontinua.

- Tipus de discontinuïtat:

a) *Evitable*:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } \exists \lim\limits_{x \to c} f(x) \\[2em] \exists \text{ f(c)} \end{array}\right\} \text{ però } \lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$

b) *Salt*:

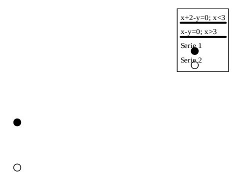
$$\text{si } \lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

c) *Asimptòtica* : Alguns o els dos límits laterals tendeix a $\pm \infty$

<u>EXEMPLE:</u>

1. Estudieu la continuïtat de la funció següent en x = 3

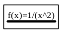
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \\[2ex] \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x+2) = 5 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x) = 3 \\[2ex] \text{f(3) = 5} \end{array}\right\} \lim_{x\to 3^-} f(x) = 5 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3 \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$$

En x = 3 discontinuïtat de salt

2. Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en x = 0



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)\,? \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\[2ex] \nexists f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

Discontinuïtat asimptòtica en x = 0

3. Estudieu la continuïtat de la funció següent en x = 2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

f(2) = 6

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 = \lim_{x \to 2^+} f(x) \neq f(4)$$

En x = 2 discontinuïtat evitable