

## TEMA 6 : Derivades. Tècniques de derivació

### Activitats

1. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les funcions següents en els punts indicats:

a)  $f(x) = 3x^2$  en  $x = 2$

b)  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  en  $x = -1$

c)  $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$  en  $x = -5$

d)  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x = 2$

e)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  en  $x = 2$

f)  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 3$

2. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les funcions anteriors.

3. Calculeu les següents derivades:

a)  $f(x) = 3$

b)  $f(x) = 5x^3$

c)  $f(x) = \frac{5x^3 + 3x - 2}{4}$

d)  $f(x) = 5\sqrt{x}$

e)  $f(x) = 3\sin x$

f)  $f(x) = e^x + 3x - 9$

g)  $f(x) = x \cdot \ln x$

h)  $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x$

i)  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4}$

j)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

k)  $f(x) = 3^x$

l)  $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + 3x$

4. Calculeu les següents derivades:

a)  $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^3}$

b)  $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + \sqrt{x} \cos x$

c)  $f(x) = 4^x \operatorname{arcsen} x$

d)  $f(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

e)  $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$

f)  $f(x) = \frac{5x - 2}{4x^2 - 1}$

g)  $f(x) = \frac{x + e^x}{x - e^x}$

h)  $f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsen} x}$

i)  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^3}$

j)  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

k)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{x \operatorname{sen} x}$

l)  $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

m)  $f(x) = \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{\ln x}$

5. Calculeu les següents derivades:

a)  $y = (4x^3 + 6x - 2)^{17}$

b)  $y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 6}$

c)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 5}}$

d)  $y = (\operatorname{sen} x - \cos x)^5$

e)  $y = (1 - x^2)^5 (\operatorname{arcsen} x)^3$

f)  $y = \frac{1}{(2x + 1)^3}$

g)  $y = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}^2 3x$

h)  $y = \cos^3 x - \cos(x^3)$

i)  $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

j)  $y = \log(\operatorname{sen} \sqrt{x})$

k)  $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$

l)  $y = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$

m)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

n)  $y = \operatorname{arcsen} \frac{x^2 - 1}{x^2}$

o)  $y = \operatorname{arcsen}(1 - e^x)$

p)  $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1})$

q)  $y = x^5 e^{-\frac{1}{x^6}}$

r)  $y = 8^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)}$

s)  $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}}$

t)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

u)  $y = \ln(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{arcsen}(\ln x)$

v)  $y = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

w)  $y = \operatorname{arctg}(tg^2 x)$

6. Calculeu les següents derivades:

a)  $y = x^{3x}$

b)  $y = x^{x^2}$

c)  $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$

d)  $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$

e)  $y = \sqrt[x]{\ln x}$

f)  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

g)  $y = (2x^2 + 3x - 2)^{\sin x}$

h)  $y = (\arctan gx)^{3x-5}$

7. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

8. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

9. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2^{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

10. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció  $f(x) = |x - 3|$

11. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció  $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

12. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x + a & \text{si } x \leq 1 \\ bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

13. Trobeu els valors de m i n perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

14. Trobeu els valors de a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

15. Calculeu el punt per al qual la derivada de la funció  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$  val 1

16. Calculeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba  $f(x) = x^2$  en el punt d'abscissa 2

17. Trobeu l'equació de la recta tangent i normal a la corba d'equació

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$  en el punt d'abscissa  $x = 0$ . Determineu els punts on la tangent a la corba és horitzontal.

18. Determineu l'equació de la recta tangent a la paràbola d'equació  $y = x^2$  paral·lela a la recta d'equació  $y = 4x$ .
19. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  paral·lela a la recta d'equació  $3x - y = 2$
20. En quin punt de la corba de la funció  $f(x) = x \cdot \ln x - x$ , la pendent de la recta tangent val 1.
21. En quins punt la tangent a la corba  $f(x) = 6x^3 + 9x^2 - 2$  és paral·lela a l'eix OX.
22. Determineu  $m$  de manera que la tangent a la corba  $y = -x^2 - (2m + 1)x + m + 2$  en  $x = 2$ , sigui paral·lela a la recta  $3x - y + 2 = 0$ .
23. Sigui la funció  $f(x) = x^2 + ax + 3$ , determineu el valor de  $a$  perquè la gràfica de  $f$  tingui una tangent en el punt d'abscissa  $x = 1$  paral·lela a la recta  $2x + y = 0$ .
24. Determineu l'equació de la recta tangent a  $f(x) = x^2 + 4x + 1$  que té una inclinació de  $30^\circ$ .
25. Trobeu les equacions de les rectes tangents a la corba  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ , amb pendent 5. Hi ha alguna amb pendent 1?. Hi ha cap valor de pendent al qual correspongui una única recta tangent?.
26. Determineu l'equació de la recta tangent a la corba  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$  paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.
27. Considereu la funció  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ . Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica en el punt d'abscissa  $x = 0$ . Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.