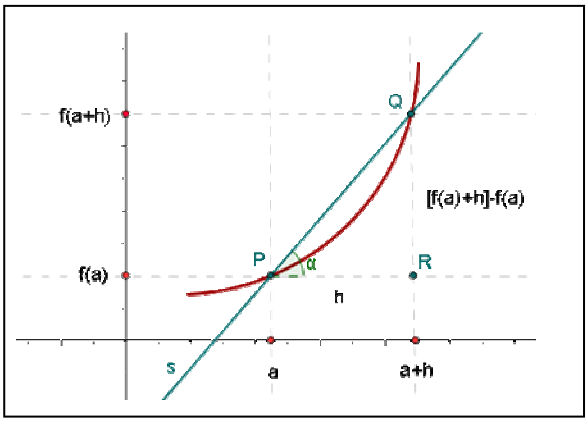
TEMA 6 : Derivades i tècniques de derivació

6.1. DERIVADA D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

6.1.1. Taxa de variació mitjana

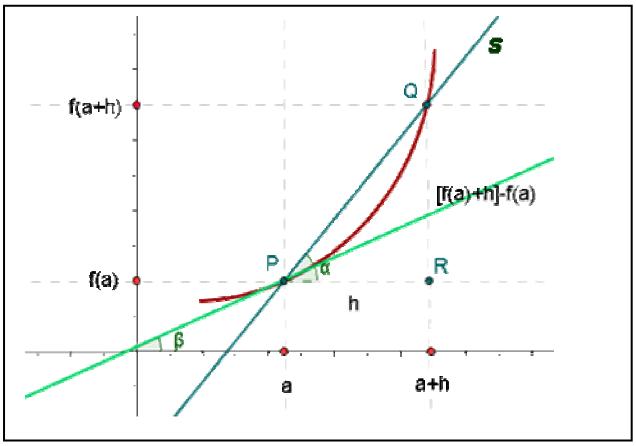
- Donada un funció y = f (x), s'anomena *increment de f en x = a* l'expressió: . $\Delta f = f(a+h) - f(a)$. El seu significat és la variació (augment o disminució) de f quan la variable independent passa de x = a a x = (a + h). A h se l'anomena *increment de x*.
- El quocient $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, s'anomena *taxa de variació mitjana* i significa la variació relativa de f amb relació a x en l'interval (a, a + h)



- Gràficament és la pendent de la recta que passa pels punts P (a, f(a)) i Q(a + h, f(a + h))

6.1.2. Derivada d'una funció en un punt

- El límit, $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si existeix i és finit s'anomena *derivada de la funció f en el punt x_0 = a* i es designa per f'(a).
- Gràficament f'(a) significa el pendent de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscisses x_0 = a



$$\boxed{f'(a) = \text{tg}\ \alpha}$$

- Si existeix f'(a) es diu que f és *derivable en x_0 = a*

EXEMPLES

1. Si $f(x) = x^2$ trobeu la derivada en $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2$$

llavors f'(1) = 2

2. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, calculeu f'(0)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{\cancel{h}}{h^{\cancel{3}2}}} = \lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{h^2}} = +\infty$$

Aleshores f no és derivable en $x_0 = 0$

6.1.3. Derivades laterals d'una funció en un punt

- S'anomena *derivada per l'esquerra* de f en el punt x_0 = a i es designa per $f_-^{'}(a)$:
$$f_-^{'}(a) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- S'anomena *derivada per la dreta* de f en el punt x_0 = a i es designa per $f_+^{'}(a)$:
$$f_+^{'}(a) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- f és derivable en el punt x_0 = a $\Leftrightarrow$ $f_-^{'}(a) = f_+^{'}(a)$

6.2. FUNCIÓ DERIVADA

- Si una funció f és derivable en tots els punts d'un interval I = (a,b), la funció:

  f': x $\longrightarrow$ f'(x) s'anomena *funció derivada de f*

- Si f' és derivable, la seva derivada f'' s'anomena segona derivada de f, i així successivament, es defineixen f''', f^{IV}, ..., $f^{(n)}$ (derivada tercera, quarta,.... n-èssima)

EXEMPLES:

1. Donada la funció f(x) = 5x – x^2,

a) Trobeu f’, f’’, f’’’, ...

- $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)-(x+h)^2-(5x-x^2)}{h}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{5x+5h-x^2-2xh-h^2-5x+x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2xh+5h}{\cancel{h}}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-h^2-2x+5)}{\cancel{h}}=-2x+5 \quad\rightarrow\quad f'(x)=-2x+5$

- $f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2(x+h)+5-(-2x+5)}{h}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{-2x-2h+5+2x-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{\cancel{h}}=-2 \quad\rightarrow\quad f''(x)=-2$

- $f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2+2}{h}=0 \quad\rightarrow\quad f'''(x)=0$

- $f^{IV}=.....=f^{(n)}=0$

b) Calculeu f’(3) , f’’(3) de la funció anterior:

- f’(x) = -2x + 5 → f’(3) = -2·3 + 5 = -1
- f’’(x) = -2 → f’’(3) = -2

6.3. REGLES DE DERIVACIÓ

6.3.1. Operacions amb derivades

Funció	**Derivada**
Producte per un nombre	
$y=k\cdot u$	$y'=k\cdot u'$
Suma i resta	
$y=u+v-w$	$y'=u'+v'-w'$
Producte	
$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Quocient	
$y=\frac{u}{v}$	$y=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
Composició. Regla de la cadena	
$y=u\ (v\ (x))$	$y'=u'\ (v\ (x))\cdot v'(x)$

6.3.2. Derivada de les funcions elementals

TAULA DE DERIVADES

Funció	Derivada	Exemples		Exemples	
Constant					
y = k	***y'=0***	***y = 8***	***y '= 0***		
Identitat					
y = x	***y' = 1***	***y = x***	***y'=1***		
Funcions potencials					
$y = x^m$	$y' = m \cdot x^{m-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$	$y = \left(2x^2+1\right)^3$	$y' = 3 \cdot \left(2x^2+1\right)^2 \cdot 4x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{x}$	$y' = \dfrac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{x}$	$y' = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \dfrac{6x}{5 \cdot \sqrt[5]{\left(3x^2\right)^4}}$
Funcions exponencials					
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = 3^x$	$y' = 3^x \cdot \ln 3$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} \cdot \ln 5$
Funcions logarítmiques					
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln\left(x^2+7x\right)$	$y' = \dfrac{2x+7}{x^2+7x}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_2(5x+7)$	$y' = \dfrac{5}{(5x+7) \cdot \ln 5}$
Funcions trigonomètriques					
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin 5x$	$y' = 5 \cdot \cos 5x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos 3x^2$	$y = -6x \cdot \sin 3x^2$
$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = tg\,7x$	$y' = (1 + tg^2(7x)) \cdot 7$ $y' = \dfrac{7}{\cos^2(7x)}$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x^2$	$y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \dfrac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$y = arctg\,x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = arctg\,x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = arctg\ 3x$	$y' = \dfrac{3}{1+(3x)^2}$

6.3.3. <u>Derivada de funcions del tipus</u> $y = u^v$

Per trobar la derivada d'un funció del tipus $y = u^v$, cal seguir el següent procediment:

$y = u^v$

$\ln y = \ln u^v$

$\ln y = v \cdot \ln u$

Derivem

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \rightarrow \quad y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \cdot y$$

<u>EXEMPLE</u>

1. Trobeu la derivada de $y = \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$

$$y = \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$
$$\ln y = \ln\left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$
$$\ln y = \sin x \cdot \ln\left(3x^2 - 5\right)$$
$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)}$$
$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot y$$
$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot \left(3x^2 - 5\right)^{\sin x}$$

6.3.4. <u>Derivada de una funció implícita</u>

- Una *funció* s'anomena *implícita* quan està definida de la forma F(x,y) = 0 en lloc de la forma habitual (y = f(x))

Per exemple la funció : $y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$, on y és una funció que depèn de x, és una funció implícita

- Per poder derivar una funció implícita només cal fer servir la regla de la cadena, i tenir present que en el cas de la variable independent (x) es deriva directament i pel que fa a la variable dependent (y) s'ha de considerar que és una funció que depèn de la variable independent i per tant cal aplicar la regla de la cadena

EXEMPLE

1. Troba la derivada de la funció implícita : $y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$

Derivem:

$3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' + 5y + 5x \cdot y' + 1 + y' = 0$

$y'(3y^2 + 2y + 5x + 1) = -5y - 1 \;\rightarrow\; y' = \dfrac{-5y - 1}{3y^2 + 2y + 5x + 1}$

6.4. ESTUDI DE LA DERIVABILITAT D'UNA FUNCIÓ

NOTA

Si una funció és derivable en un punt, necessàriament és continua:

Derivabilitat → Continuïtat
No continuïtat → no derivabilitat
Continuïtat $\not\rightarrow$ Derivabilitat

Si suposem que una funció f és continua en x_0 (ja que si no és continua no és derivable), si:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\ f'(x_0^-) \\ \\ \exists\ f'(x_0^+) \end{array}\right\}\ i\ f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow\ \exists\ f'(x_0)$$, la funció és *derivable en x_0*

EXEMPLES

1. Estudieu la derivabilitat de la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \prec 2 \\ \\ 3x - 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Continuïtat

- si x < 2 → f(x) = x^2 → polinomi → continua i derivable
- si x > 2 → f(x) = 3x – 2 polinomi → continua i derivable
- si x = 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4 \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 2) = 4 \end{array}\right\}\ \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$$ → f és continua en x = 2

Aleshores f és continua en |R

b) Derivabilitat

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \prec 2 \\ 3 & si\ x \succ 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f'_-(2) = 4 \\ f'_+(2) = 3 \end{matrix}\right\} \quad \nexists\ f'(x) \rightarrow \text{f no és derivable en x = 2}$$

f és continua en $|R$ i derivable en $R - \{2\}$

2. Calculeu m i n perquè la funció següent sigui derivable en $x_0 = 1$

$$f(x)\begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \le 1 \\ -x^2 + nx & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

Si f és derivable en x = 1 → f és continua en x = 1

Continuïtat → $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 - 5x + m = m - 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(-x^2 + nx\ \ ) = n - 1 \end{matrix}\right\} \quad m - 4 = n - 1$$

Derivabilitat → $f_1^-(1) = f_1^+(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & si\ x \le 1 \\ -2x + n & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f'_-(1) = -3 \\ f'_+(1) = n - 2 \end{matrix}\right\} \quad -3 = n - 2 \rightarrow n = -1 \longrightarrow$$

m – 4 = -1 – 1 → m = 2

6.5. <u>RECTA TANGENT I NORMAL A UNA CORBA EN UN DELS SEUS PUNTS.</u>

L'obtenció de la recta tangent a una corba en un dels seus punts és l'aplicació més immediata de les derivades, perquè com sabem, $f'(x_0)$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = f(x_0)$ en el punt d'abscissa x_0.

Si $f(x)$ és derivable en x_0, l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $P(x_0,y_0) = P(x_0,f(x_0))$ és:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$$ *Equació de la recta tangent*

EXEMPLE:

1. Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+3}$ en $x_0 = 3$

f és continua i derivable en x_0

$$y_0 = y(3) = \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x-x-3)-x^2+2x}{(x+3)^2} =$$

$$\frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$$

$$f'(3) = \frac{9+18-6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Equació de la recta tangent: $\boxed{\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}(x-3)}$

NOTA:

Anomenem *recta normal* a una corba en un dels seus punt, a la recta perpendicular a la recta tangent a la corba en aquest punt.

Recordant la condició de perpendicularitat de dues rectes la pendent de la recta normal a la funció $f(x)$ en el punt x_0 serà: $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ i la seva equació serà:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}\cdot (x - x_0)}$$ *Equació de la recta normal*

EXEMPLE:

1. Trobeu l'equació de la recta normal a la corba del exemple anterior en el mateix punt $x_0 = 3$

Equació de la recta normal: $\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{-12}{7}(x-3)$