Pedro A. Martínez Ortiz

DIVISIBILIDAD EN LOS NÚMEROS NATURALES

CONTENIDOS

1. MÚLTIPLOS

DEFINICIÓN

Se dice que un número natural a, es ***múltiplo*** del número natural b, si existe otro número natural c tal que al multiplicarlo por b se obtiene a.

EJEMPLO

¿Es 12 múltiplo de 4? El número 12 es múltiplo de 4 porque existe otro número natural (que es 3) de manera que al multiplicarlo por el 4 obtengo 12. $4 \cdot 3 = 12$

EJEMPLO

¿Es 25 múltiplo de 3? El número 25 **NO** es múltiplo de 3 porque no podemos encontrar ningún número natural que al multiplicarlo por el 3 me dé 25.

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por otros números naturales. Así pues, los múltiplos de 5 serían:

$$\dot{5} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \dots\}$$

Para representar los múltiplos de un número escribiremos un puntito sobre dicho número. Observa que los múltiplos de un número natural cualquiera son **INFINITOS**.

2. DIVISORES

DEFINICIÓN

Se dice que un número natural a, es ***divisor*** del número natural b, si la división de b entre a es exacta.

EJEMPLO

¿Es 7 divisor de 28? El número 7 es divisor de 28 porque la división de 28 entre 7 es exacta.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

EJEMPLO

¿Es 4 divisor de 51? El número 4 NO es divisor de 51 porque la división de 51 entre 4 no es exacta.

$$\begin{array}{r|l} 51 & 4 \\ \hline 3 & 12 \end{array}$$

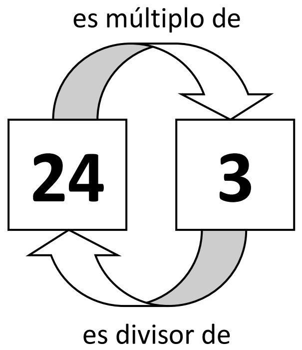
Los divisores de un número se obtienen dividiendo dicho número por otros números naturales por los cuales la división sea exacta. Así pues, los divisores de 20 serían:

$$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Un número natural cualquiera siempre tiene al 1 y a sí mismo como divisor. Observa que, al contrario que ocurría con los múltiplos, la cantidad de divisores de un número natural es **FINITA**.

Por otro lado es importante observar que la relación de múltiplos y divisores es cíclica. Así, por ejemplo:

24 es múltiplo de 3
3 es divisor de 24



3. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

DEFINICIÓN

Un número natural es **primo** si sólo tiene dos divisores, el 1 y él mismo. Aquellos números que no son primos se les denominan **compuestos**.

EJEMPLO

El número 3 es primo porque sus únicos divisores son el 1 y él mismo.

$$D(3) = \{1, 3\}$$

Sin embargo, el 10 es compuesto ya que tiene más divisores además del 1 y él mismo:

$$D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$$

Hay infinitos números primos, pero podemos conocer cuáles son los primeros usando la conocida Criba de Eratóstenes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Elimina el 1
2. Rodea el 2 y elimina los múltiplos de 2
3. Rodea el siguiente número sin tachar y elimina sus múltiplos.
4. Procede de la misma forma hasta que no queden números que tachar

Los números que han quedado rodeados son los primeros números primos. Observa que el 1 no se considera número primo.

Ahora bien, ¿cuál es la importancia práctica de los números primos? En la vida real, uno de los usos de los números primos es la criptografía que consiste en codificar mensajes o cifrarlos para preservar su seguridad. Un claro ejemplo es el cifrado en páginas de internet donde se necesita seguridad al realizar transacciones monetarias como la pagina web de un banco. La carrera por encontrar números primos es imparable. El número primo más grande que se conoce hasta hoy tiene 17 millones de cifras. Se entregan premios de entre 150.000 € y 250.000 € a quien encuentre un primo con 100 millones o mil millones de dígitos.

4. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los **criterios de divisibilidad** son unas sencillas reglas que nos permiten saber si un número es divisor de otro sin necesidad de realizar la división. Estas son algunos criterios de divisibilidad:

UN NÚMERO ES DIVISIBLE ENTRE…	CRITERIO DE DIVISIBILIDAD	EJEMPLOS
2	Si acaba en 0 o cifra par	
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3	
5	Si acaba en 0 o en 5	
9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9	
10	Si acaba en 0	
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan posición par y la suma de las que ocupan posición impar es 0 o múltiplo de 11.	

EJERCICIO:

1. Utilizando estos criterios, indica cuáles son divisores de los siguientes números.

	Es divisible entre:					
	2	3	5	9	10	11
20						
18920						
110						
284						
462						
2475						

5. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

DEFINICIÓN

La **descomposición factorial** de un número natural consiste en expresar dicho número como producto de números primos.

EJEMPLO

La descomposición factorial del número 30 sería:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Porque sólo multiplicamos números primos para obtener el número 30.

¿Cómo podemos hallar la descomposición factorial de cualquier número de forma más sistemática?

A modo de ejemplo, realizaremos paso a paso la descomposición factorial de 60. Asegúrate de que entiendes cada una de las indicaciones proporcionadas. Si no es así, pregunta a tu profesor.

<table>
<tr><td>PASO 1: Escribimos el número y trazamos una línea vertical a su derecha.</td><td>$\begin{array}{r|l} 60 & \\ & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>PASO 2: Al lado derecho de la línea, colocamos el primer número primo que es divisor del número.</td><td>$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>PASO 3: Realizamos la división de ambos números. Debajo, a la izquierda colocamos el cociente que resulta de la división.</td><td>$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>PASO 4: Se repiten los dos pasos anteriores pero usando ahora el último cociente. <u>RECUERDA</u>: Antes de probar con cualquier otro número primo, vuelve a probar con el que utilizaste en el paso anterior. En caso de que no sea divisible, prueba con un nuevo número primo.</td><td>$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>PASO 5: La factorización termina cuando el cociente obtenido es 1. Entonces, la factorización del número será el producto de todos los divisores primos colocados a la derecha de la línea.</td><td>$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$</td></tr>
</table>

EJERCICIO:

1. Escribe la descomposición factorial de los siguientes números:

a) 180	b) 420	c) 7912	d) 2325
e) 350	f) 1593	g) 1037	h) 3900
i) 11340	j) 5985	k) 4680	l) 15300

6. MÁXIMO COMÚN DIVISOR

DEFINICIÓN

El ***máximo común divisor*** (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

EJEMPLO

Vamos a calcular el m.c.d. de 30 y 45. Para ello escribimos los divisores de ambos números.

$$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \qquad D(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Ahora, simplemente, hemos de observar cuál es el divisor más grande que tienen en común. En este caso, vemos que es el 15. Así pues, escribiremos:

$$m.c.d.(30, 45) = 15$$

¿Cómo podemos calcular el máximo común divisor sin necesidad de averiguar todos los divisores de cada uno de los números?

PASO 1	Obtenemos la **descomposición factorial** de cada uno de los números	$\begin{array}{r\|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r\|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $45 = 3^2 \cdot 5$
PASO 2	El máximo común divisor será el producto de los **factores comunes** elevados al **menor exponente**.	$m.c.d.(30, 45) = 3 \cdot 5 = 15$

EJERCICIOS:

2. Realiza la descomposición factorial de los siguientes números y calcula su máximo común divisor:
   a) 300 y 120 b) 350 y 294 c) 198, 132 y 330 d) 150, 270 y 320

3. Alex tiene 625 canicas transparentes y otras 450 opacas. Quiere distribuirlas equitativamente en bolsas iguales del mayor tamaño posible. ¿Cuántas canicas deberá poner en cada bolsa? ¿Cuántas bolsas tendrá de canicas transparentes? ¿Cuántas bolsas tendrá de canicas opacas?

7. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

DEFINICIÓN

El ***mínimo común múltiplo*** (m.c.m.) de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números.

EJEMPLO

Vamos a calcular el m.c.m. de 30 y 45. Para ello escribimos los primeros múltiplos de ambos números.

$$\dot{30} = \{30, 60, 90, 120, 150, \ldots\} \qquad \dot{45} = \{45, 90, 135, 180, \ldots\}$$

Ahora, simplemente, hemos de observar cuál es el múltiplo más pequeño que comparten. En este caso, vemos que es el 90. Así pues, escribiremos:

$$m.c.m.(30,\ 45) = 90$$

¿Cómo podemos calcular el mínimo común múltiplo sin necesidad de escribir parte del listado de los múltiplos de cada uno de los números?

PASO 1	Obtenemos la **descomposición factorial** de cada uno de los números	$\begin{array}{r\|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $45 = 3^2 \cdot 5$
PASO 2	El mínimo común múltiplo será el producto de los todos los factores distintos que aparecen elevados al <u>**mayor exponente**</u>.	$m.c.m.(30,\ 45) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

EJERCICIOS:

4. Realiza la descomposición factorial de los siguientes números y calcula su mínimo común múltiplo:
   a) 35 y 85   b) 121 y 55   c) 90, 108 y 450   d) 330, 110 y 132

5. La luz verde de un semáforo se enciende cada 45 segundos, y la de otro semáforo, cada 30 segundos. Si acaban de coincidir los dos en verde, ¿cuántos segundos tardarán en coincidir ora vez?