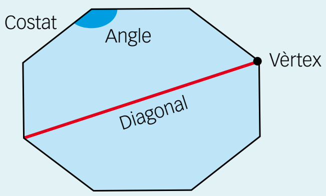
CLAUS PER COMENÇAR

Elements d'un polígon

- Els **costats** són els segments que delimiten el polígon.
- Les **diagonals** són els segments que uneixen dos vèrtexs no consecutius.
- Els **angles interiors** són els angles formats per dos costats consecutius.
- Els **vèrtexs** són els punts on es tallen els costats.

EXEMPLE



ACTIVITATS

1 Indica si aquestes afirmacions són certes o falses:

a) Un polígon pot tenir més costats que vèrtexs.

b) Un polígon pot tenir més angles que vèrtexs.

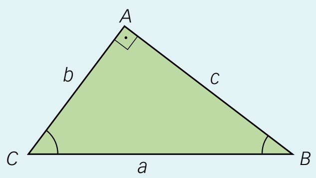
c) Un polígon pot tenir més diagonals que vèrtexs.

d) Un polígon pot tenir més costats que angles.

e) Un polígon pot tenir més costats que diagonals.

Teorema de Pitàgores

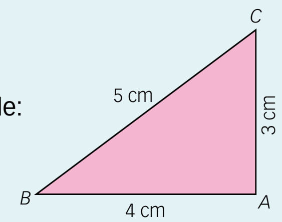
En un triangle rectangle es compleix que el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

EXEMPLE

Comprova que es compleix el teorema de Pitàgores en aquest triangle rectangle:

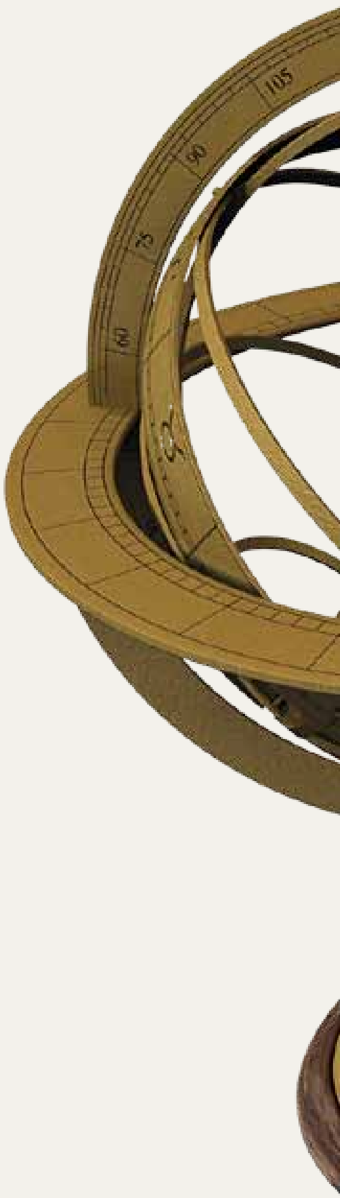


$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a = 5 \; b = 3 \; c = 4} \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \end{cases}$$

ACTIVITATS

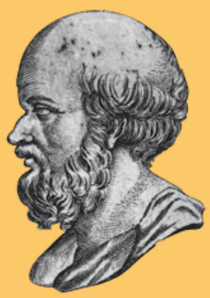
2 Comprova si un triangle de costats 25 cm, 7 cm i 9 cm és rectangle.

3 Quant mesura el catet d'un triangle rectangle si l'altre catet mesura 5 dm i la hipotenusa 8 dm?



276 aC

Eratòstenes neix a Cirene, actual Shahhat (Líbia). Va estudiar a Alexandria i Atenes i va ser un matemàtic, geògraf, filòsof i astrònom molt reconegut a la seva època. Va ser l'autor de la primera mesura de la circumferència terrestre.



Cossos geomètrics

6

SABER

- Rectes, plans i angles en l'espai
- Poliedres. Poliedres regulars
- Prismes i piràmides
- Àrea de prismes i piràmides
- Cossos de revolució
- Àrea dels cossos de revolució

SABER FER

- Obtenir el desenvolupament pla del prisma i la piràmide
- Obtenir el desenvolupament pla dels cossos rodons

? INTERPRETA LA IMATGE

L'esfera armil·lar

Al llarg de la seva vida, Eratòstenes va determinar diverses mesures. Utilitzant l'esfera armil·lar, va calcular l'interval entre els tròpics.

També es va atrevir a demostrar que la Terra no era plana com gairebé tothom creia, i va causar enrenou a la seva època quan va calcular científicament la circumferència del planeta. Va establir la longitud de la circumferència de la Terra amb un error força petit respecte a les estimacions actuals.

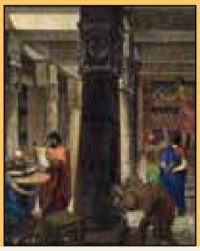
- Quina forma té la Terra?
- Com en podem calcular la superfície?

255 aC

S'atribueix a Estòstenes la invenció de l'esfera armil·lar, instrument astronòmic format per cèrcols (armil·les) que representen els cercles més importants que es poden considerar sobre l'esfera celeste. S'utilitza per representar, de manera aproximada, el moviment dels astres al voltant de la Terra o el Sol i els moments dels equinoccis i els solsticis.

236 aC

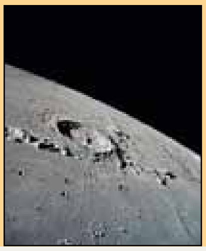
Es va fer càrrec de la biblioteca d'Alexandria i va dur-hi a terme algunes activitats científiques. La biblioteca fou creada a l'inici del segle III aC per Ptolemeu I Sòter i es creu que va arribar a disposar d'un fons bibliogràfic de 700.000 volums.



194 aC

Eratòstenes, al final de la seva vida, va patir ceguesa i va morir de fam a Alexandria, per la seva pròpia voluntat, ja que havia perdut el desig de viure.

Un cràter de la Lluna porta el nom d'Eratosthenes en honor seu.



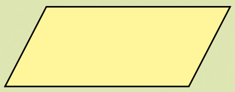
Va passar a la història per inventar el **garbell d'Eratòstenes**, un algorisme que permet cercar tots els nombres primers fins a un enter determinat. Es tracta d'anar senyalant els nombres primers i eliminant-ne els múltiples.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Rectes, plans i angles en l'espai

Els **plans** són superfícies sense arestes ni ondulacions. No tenen gruix i són il·limitats, és a dir, no tenen ni principi ni fi.

Per representar-los en dibuixem una part, que acostumem a representar en forma de paral·lelogram.



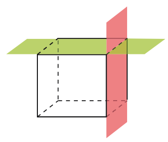
1.1. Posicions relatives de dos plans

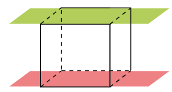
Dos **plans** poden ser:

- **Paral·lels** si no tenen cap punt en comú.
- **Secants** si es tallen en una recta.

EXEMPLE

1. Indica la posició relativa d'aquests parells de plans:

a)  Secants

b)  Paral·lels

1.2. Posicions relatives de dues rectes

Dues **rectes** a l'espai:

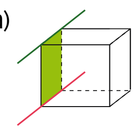
- Són **paral·leles** si estan en el mateix pla i no tenen punts comuns.
- Són **secants** si estan en el mateix pla i tenen un punt comú.
- S'**encreuen** si estan en plans diferents i no tenen punts comuns.

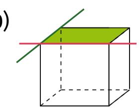
T'HI ATREVEIXES?

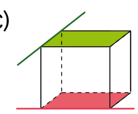
Saps quantes rectes passen per un punt a l'espai?
I quants plans contenen una recta a l'espai?

EXEMPLE

2. Indica les posicions dels parells de rectes següents:

a)  Paral·leles

b)  Secants

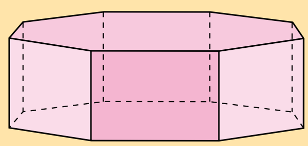
c)  S'encreuen

ACTIVITATS

1 **PRACTICA.** Fixa't en l'habitació on ets i indica elements que et suggereixin:

a) Plans paral·lels
b) Plans secants
c) Rectes paral·leles
d) Rectes secants
e) Rectes que s'encreuen

2 **APLICA.** Indica les posicions dels plans i les rectes que trobis en aquest cos geomètric.



3 **REFLEXIONA.** Dues rectes secants estan sempre en el mateix pla?

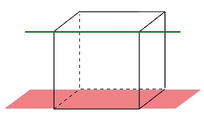
1.3. Posicions relatives d'una recta i un pla

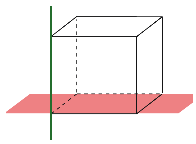
Una **recta** respecte a un **pla** pot ser:

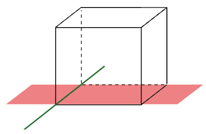
- **Paral·lela** si la recta no té cap punt en comú amb el pla.
- **Secant** si la recta té un punt en comú amb el pla.
- **Contingudа** si tots els punts de la recta pertanyen al pla.

EXEMPLE

3. Indica la posició relativa de cada recta respecte al pla marcat.

a) 
Paral·lela

b) 
Secant

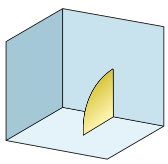
c) 
Continguda

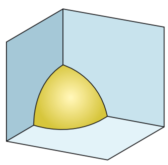
1.4. Angle diedre i angle poliedre

- Dos plans secants divideixen l'espai en quatre regions. Cadascuna d'aquestes regions és un **angle diedre**.
- Un **angle poliedre** és la regió de l'espai limitada per tres o més plans que concorren en un punt comú.

EXEMPLE

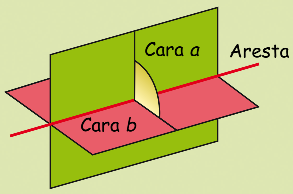
4. Indica de quin tipus són els angles marcats.

a) 
Angle diedre

b) 
Angle poliedre

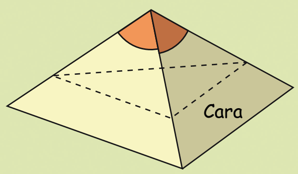
Elements d'un angle diedre:

- **Cares:** semiplans *a* i *b*.
- **Aresta:** recta de tall comuna als dos plans.



Elements d'un angle poliedre:

- **Cares:** cadascun dels plans.
- **Vèrtex:** punt comú dels plans.



ACTIVITATS

4 PRACTICA. Pensa en la teva habitació i indica'n elements que et suggereixin:

a) Rectes paral·leles a un pla

b) Rectes secants a un pla

c) Rectes contingudes en un pla

5 PRACTICA. Troba exemples d'angles diedres i poliedres a l'aula.

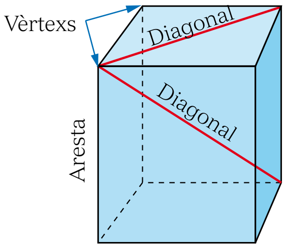
6 APLICA. Decideix si és cert o fals. Justifica la resposta.

a) Un cub té 6 angles poliedres.

b) Un cub té 10 angles diedres.

7 REFLEXIONA. Si dues rectes són paral·leles a un pla, són necessàriament paral·leles entre si? Justifica la teva resposta.

2 Poliedres



Un **poliedre** és un cos geomètric limitat per cares en forma de polígons.

Els elements d'un poliedre són:

- **Cares:** són els polígons que limiten el poliedre.
- **Arestes:** són les línies coincidents amb els costats de les cares.
- **Vèrtexs:** són els punts comuns de les arestes.
- **Diagonal:** és el segment que uneix dos vèrtexs no consecutius del poliedre. La podem traçar en una mateixa cara o entre cares diferents.

2.1. Poliedres còncaus i convexos

Els **poliedres convexos** són els que, quan en prolonguem una cara qualsevol, no talla el poliedre.

Els **poliedres còncaus** són els que tenen alguna cara que, quan la prolonguem, talla el poliedre.

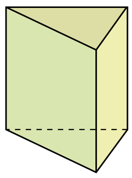
En tots els poliedres convexos es compleix la **fórmula d'Euler**:

$$\underset{\text{nre. de cares}}{C} + \underset{\text{nre. de vèrtexs}}{V} = \underset{\text{nre. d'arestes}}{A} + 2$$

No tots els poliedres còncaus compleixen la fórmula d'Euler.

EXEMPLE

5. Determina el nombre de cares, vèrtexs i arestes d'aquest poliedre i comprova si es compleix la fórmula d'Euler:

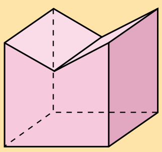


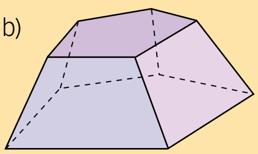
Nre. de cares: 5
Nre. de vèrtexs: 6
Nre. d'arestes: 9

$C + V = A + 2$
$5 + 6 = 9 + 2$
$11 = 11$

ACTIVITATS

8 **PRACTICA.** Indica el nombre de cares, vèrtexs i arestes que tenen els poliedres següents:

a) 

b) 

9 **APLICA.** Classifica els poliedres de l'activitat anterior en còncaus i convexos i comprova si es verifica la fórmula d'Euler.

10 **REFLEXIONA.** Quin és el nombre més petit possible de cares que pot tenir un poliedre? I d'arestes? I de vèrtexs?

2.2. Poliedres regulars

Un **poliedre** és **regular** quan compleix les condicions següents:

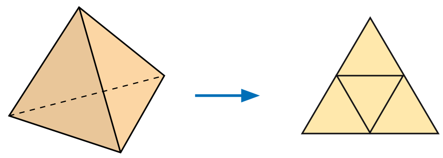
- Totes les cares són polígons regulars, iguals de forma i mida.
- En cada vèrtex concorre un mateix nombre d'arestes.

Només hi ha cinc tipus de poliedres regulars.

Desenvolupament pla

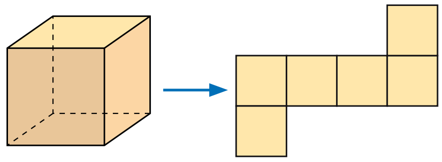
Tetraedre

Té 4 cares, que són triangles equilàters.



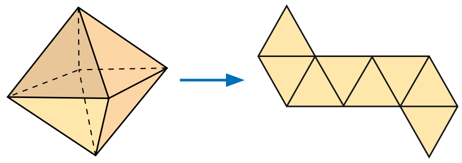
Cub

Té 6 cares, que són quadrats.



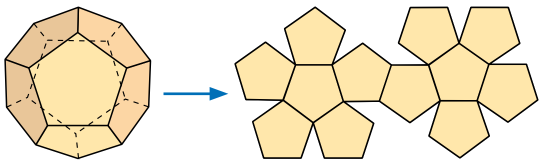
Octaedre

Té 8 cares, que són triangles equilàters.



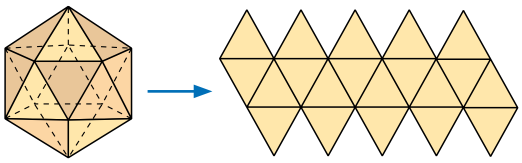
Dodecaedre

Té 12 cares, que són pentàgons regulars.



Icosaedre

Té 20 cares, que són triangles equilàters.



Anomenem els poliedres segons el nombre de cares que tenen:

4 cares → Tetraedre
5 cares → Pentaedre
6 cares → Hexaedre
7 cares → Heptaedre

RECORDA

El **desenvolupament pla** d'un poliedre és la superfície que resulta quan l'estenem sobre un pla.

T'HI ATREVEIXES?

A quin poliedre regular les diagonals coincideixen amb les arestes?

ACTIVITATS

11 PRACTICA. Respon.

a) Quin poliedre o poliedres regulars podem obtenir fent servir com a cares triangles equilàters?

b) I amb pentàgons regulars?

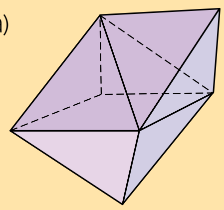
c) I amb hexàgons regulars?

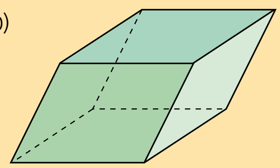
d) Quantes arestes concorren en un mateix vèrtex en un icosaedre?

e) I en un dodecaedre?

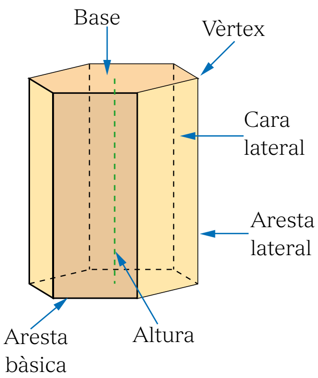
12 APLICA. Comprova que es compleix la fórmula d'Euler en els cinc poliedres regulars.

13 REFLEXIONA. Són regulars els poliedres següents? Justifica la resposta.

a) 

b) 

3 Prismes

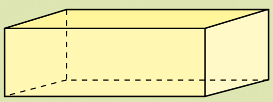


Un **prisma** és un poliedre en què dues cares són iguals i paral·leles entre si i la resta, paral·lelograms.

Els elements d'un prisma són:

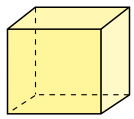
- Les **bases** o **cares bàsiques**, que són dos polígons iguals situats en plans paral·lels.
- Les **cares laterals**, que són paral·lelograms.
- Les **arestes bàsiques**, que són els costats dels polígons de les bases, i les **arestes laterals,** que són els costats de les cares laterals que uneixen les bases.
- Els **vèrtexs**, que són els punts on es tallen les arestes.
- L'**altura** d'un prisma és la distància entre les bases.

El **paral·lelepípede** és un tipus de prisma molt freqüent en què totes les cares són paral·lelograms. Si, a més, són rectes, s'anomenen **ortoedres**.

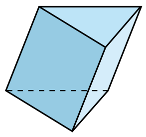


3.1. Classes de prismes

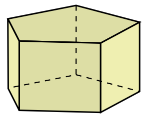
Per anomenar els prismes ens fixem en les bases:



Prisma quadrangular



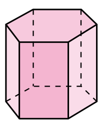
Prisma triangular



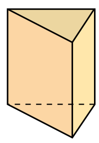
Prisma pentagonal

Si les arestes laterals d'un prisma són perpendiculars a les arestes bàsiques diem que el **prisma** és **recte**; en cas contrari, l'anomenem **prisma oblic**.

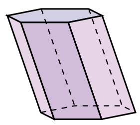
En els prismes rectes, si els polígons de les bases són regulars els anomenem **prismes regulars**; quan no són regulars es denominen **prismes irregulars**.



Prisma recte regular



Prisma recte irregular



Prisma oblic

ACTIVITATS

14 **PRACTICA.** Dibuixa un prisma recte de base rectangular i un prisma oblic triangular. Quants vèrtexs i arestes té cadascun?

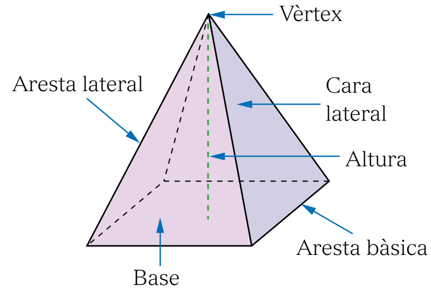
15 **PRACTICA.** Dibuixa un prisma regular i un d'irregular.

16 **APLICA.** Calcula el nombre de vèrtexs, arestes i cares d'un prisma que té com a base un hexàgon regular.

17 **REFLEXIONA.** Indica el polígon que forma la base d'un prisma de 15 arestes.

4 Piràmides

Una **piràmide** és un poliedre en què una de les cares és un polígon qualsevol i les altres són triangles que concorren en un punt.

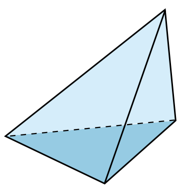


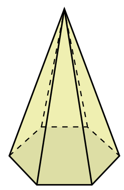
Els elements d'una piràmide són:

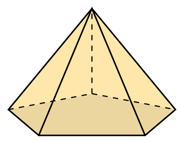
- La **base**, que és un polígon qualsevol.
- Les **cares laterals**, que són triangles que concorren en un punt anomenat **vèrtex de la piràmide**.
- Les **arestes bàsiques** i les **arestes laterals**, que són les arestes de la base i de les cares laterals, respectivament.
- L'**altura** de la piràmide és el segment perpendicular traçat des del vèrtex fins a la base.

4.1. Classes de piràmides

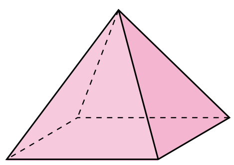
Per anomenar les piràmides també fem referència al polígon de la base. Una piràmide és **recta** si totes les cares laterals són triangles isòsceles. Si no és així, diem que és **obliqua**.

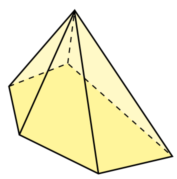

Piràmide triangular obliqua

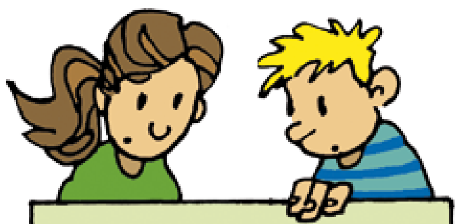

Piràmide hexagonal recta


Piràmide pentagonal recta

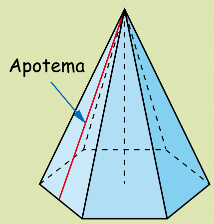
Una **piràmide** és **regular** si és recta i té com a base un polígon regular. En cas contrari, l'anomenem **irregular**.


Piràmide regular


Piràmide irregular



Anomenem **apotema** d'una piràmide regular l'altura de qualsevol de les cares laterals.



En les piràmides irregulars l'apotema no existeix.

ACTIVITATS

18 PRACTICA. Dibuixa una piràmide regular de base pentagonal i una piràmide irregular de base triangular.

Indica el nombre d'arestes i vèrtexs que té cadascuna.

19 APLICA. Una piràmide té 7 vèrtexs. Quants costats té el polígon de base?

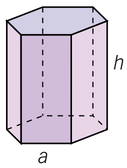
20 REFLEXIONA. Es pot dibuixar una piràmide hexagonal regular i obliqua? Per què?

SABER FER

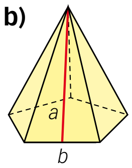
Obtenir el desenvolupament pla del prisma i la piràmide

Dibuixa el desenvolupament pla d'aquests poliedres.

a)



b)



Passos que cal seguir

1. Identifiquem quin tipus de poliedre és.

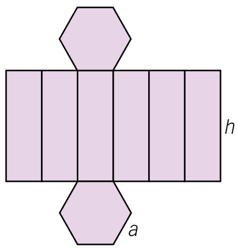
a) Prisma

b) Piràmide

2. Si és un **prisma**:

- Dibuixem una base.
- Dibuixem una de les cares laterals enganxada a la base i la resta de cares, unides a aquesta cara.
- Dibuixem la segona base sobre una de les cares laterals.

a)

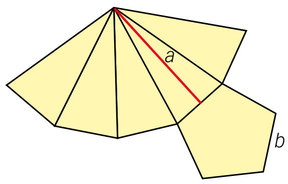


3. Si és una **piràmide**:

- Dibuixem la base.
- Dibuixem una de les cares laterals enganxada a la base i la resta de cares, unides a aquesta cara.

En una piràmide, les bases de les cares laterals no poden formar una línia recta.

b)



El **desenvolupament pla d'un prisma recte** està format per:

- Un rectangle configurat per les cares laterals; amb una altura que és la del prisma, i d'amplada, el perímetre de la base.
- Els dos polígons de les bases.

El **desenvolupament pla d'una piràmide regular** està format per:

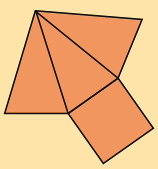
- Tants triangles isòsceles com costats tingui la base.
- El polígon de la base.

ACTIVITATS

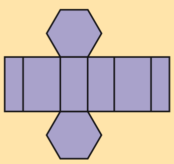
21 Dibuixa el desenvolupament pla d'un prisma triangular i d'una piràmide quadrangular regular.

22 Troba l'error que hi ha en cadascun d'aquests desenvolupaments. Corregeix-los a la llibreta.

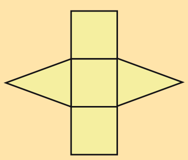
a)



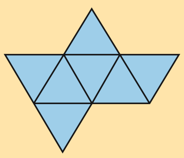
c)



b)

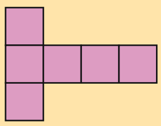


d)

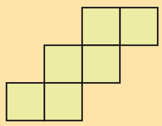


23 Fixa't en aquests desenvolupaments d'un cub:

a)



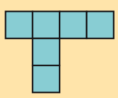
b)



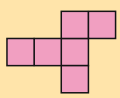
Col·loca-hi els punts de les cares perquè siguin el desenvolupament d'un dau. Recorda que les cares oposades d'un dau sumen 7.

24 Indica quins d'aquests desenvolupaments no pertanyen a un cub:

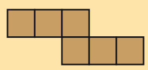
a)



b)



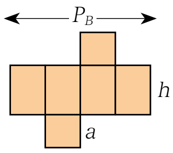
c)



Dibuixa tres desenvolupaments diferents més d'un cub.

5 Àrea d'un prisma i una piràmide

A partir del desenvolupament pla d'un prisma recte i d'una piràmide regular podem deduir fàcilment com calcular-ne l'àrea.



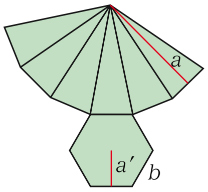
- **Àrea lateral** del **prisma**, A_L

  És la suma de les àrees de les cares laterals.

  $$A_L = P_B \cdot h$$

- **Àrea** de les **bases** del **prisma**, A_B

  És la suma de les àrees de les dues bases.



- **Àrea lateral** de la **piràmide**, A_L

  És la suma de les àrees dels n triangles de les cares laterals.

  $$A_L = n \cdot \frac{b \cdot a}{2} = \frac{P_B \cdot a}{2}$$

- **Àrea** de la **base** de la **piràmide**, A_B

  És l'àrea del polígon regular de la base.

  $$A_B = \frac{P_B \cdot a'}{2}$$

Àrea total d'un **prisma recte**, A_T:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$
$$A_T = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B$$

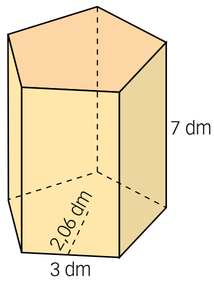
Àrea total d'una **piràmide regular**, A_T:

$$A_T = A_L + A_B$$
$$A_T = \frac{P_B \cdot a}{2} + \frac{P_B \cdot a'}{2}$$

EXEMPLE

6. Calcula l'àrea total d'aquests poliedres:

a)



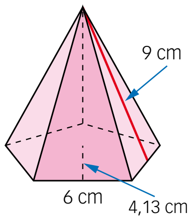
$A_L = P_B \cdot h = (3 \cdot 5) \cdot 7 = 105\ \text{dm}^2$

Com que les bases són pentàgons regulars:

$A_B = \frac{P_B \cdot a}{2} = \frac{(3 \cdot 5) \cdot 2{,}06}{2} = 15{,}45\ \text{dm}^2$

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 105 + 2 \cdot 15{,}45 = 135{,}9\ \text{dm}^2$

b)



$A_L = \frac{P_B \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot 6) \cdot 9}{2} = 135\ \text{cm}^2$

$A_B = \frac{P_B \cdot a'}{2} = \frac{(5 \cdot 6) \cdot 4{,}13}{2} = 61{,}95\ \text{cm}^2$

$A_T = A_L + A_B = 135 + 61{,}95 = 196{,}95\ \text{cm}^2$

T'HI ATREVEIXES?

Tenim dos prismes d'igual base i altura però un és recte i l'altre, oblic. Tindran la mateixa àrea total?

ACTIVITATS

25 **PRACTICA.** Calcula l'àrea total d'un cub d'aresta 2 cm i la d'un tetraedre d'aresta 3 cm.

26 **APLICA.** Dibuixa el desenvolupament i troba l'àrea total d'un prisma triangular recte d'altura 3 cm i de base un triangle equilàter de costat 2 cm.

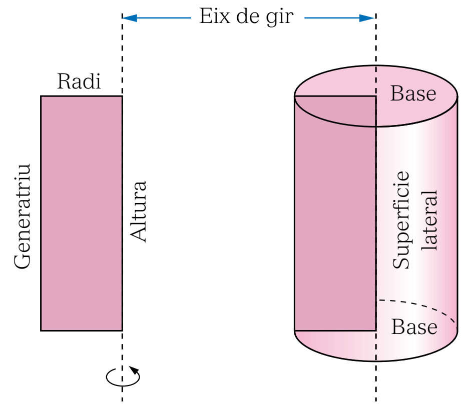
27 **APLICA.** Dibuixa el desenvolupament d'una piràmide quadrangular regular d'aresta bàsica 4 cm i altura 8 cm. Calcula'n l'àrea lateral i total.

28 **REFLEXIONA.** Expressa l'àrea d'un ortoedre en funció de les longituds de les arestes.

6 Cossos de revolució

Un **cos de revolució** és un cos geomètric que obtenim a partir d'una figura plana que gira al voltant d'un eix.

6.1. Cilindre

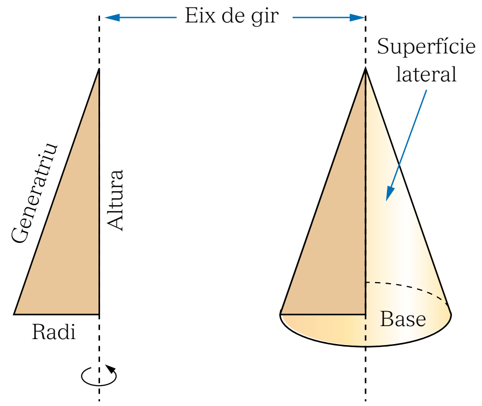


El **cilindre** és un cos geomètric generat a partir d'un rectangle que gira al voltant d'un dels costats.

Els elements d'un cilindre són:

- L'**eix del cilindre** és el costat sobre el qual gira el rectangle que genera el cilindre.
- La **generatriu** és la longitud del costat oposat a l'eix o el costat que genera la superfície lateral del cilindre.
- L'**altura** és la longitud de l'eix.
- Les **bases** són dos cercles iguals i paral·lels que es generen quan giren els costats perpendiculars a l'eix.
- El **radi** és el radi de la base.

6.2. Con



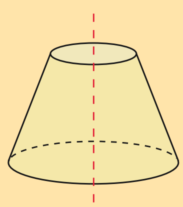
El **con** és un cos geomètric generat a partir d'un triangle rectangle que gira al voltant d'un dels catets.

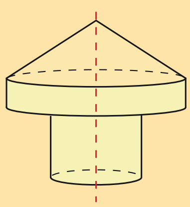
Els elements d'un con són:

- L'**eix del con** és el catet sobre el qual gira el triangle.
- La **generatriu** és la longitud de la hipotenusa del triangle.
- L'**altura** és la longitud de l'eix.
- La **base** és el cercle que es genera quan gira el catet perpendicular a l'eix.
- El **radi** és el radi de la base.

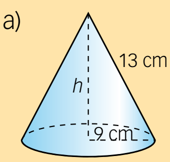
ACTIVITATS

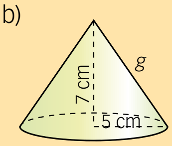
29 PRACTICA. Dibuixa la figura plana que s'ha fet girar al voltant d'un eix per obtenir els cossos de revolució següents:

a) 

b) 

30 APLICA. Determina, en cada con, l'element desconegut.

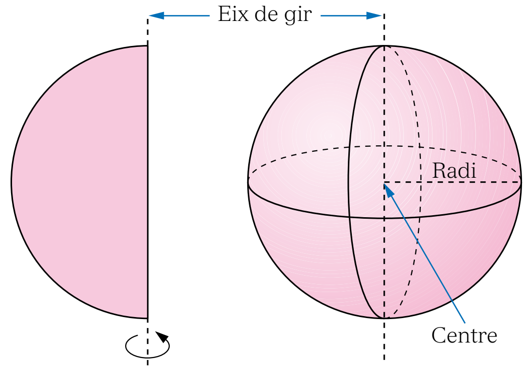
a) 

b) 

31 REFLEXIONA. Un rombe, quan gira sobre qualsevol dels seus costats, genera un cilindre? I un quadrat?

6.3. Esfera

L'**esfera** és un cos de revolució generat per un semicercle que gira al voltant del diàmetre.

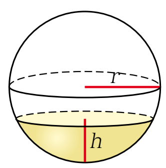
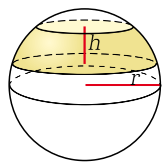
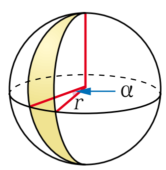


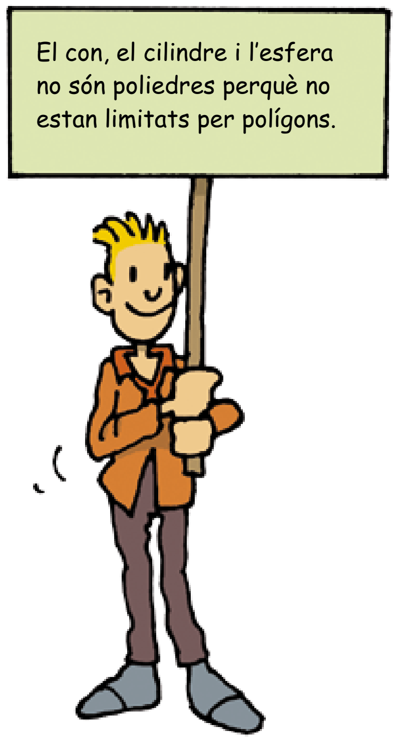
Els elements de l'esfera són:

- L'**eix** de l'esfera, que és el diàmetre sobre el qual gira el semicercle.
- El **centre**, que és el centre del semicercle.
- El **radi**, que és el radi del semicercle.

6.4. Figures esfèriques

Les **figures esfèriques** s'obtenen en seccionar una esfera en un o més plans.

Casquet esfèric		Cadascuna de les parts en què queda dividida una esfera quan és seccionada per un pla.
Zona esfèrica		Part de l'esfera compresa entre dos plans paral·lels.
Fus esfèric		Part de l'esfera compresa entre dos plans secants que passen pel centre de l'esfera.



ACTIVITATS

32 PRACTICA. Indica quines figures esfèriques representen aquestes imatges:

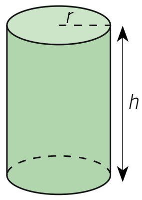
33 APLICA. El radi d'una esfera és de 2,5 cm. Dibuixa el semicercle i l'eix de gir que ha generat aquesta esfera.

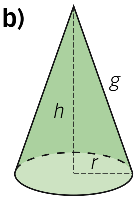
34 REFLEXIONA. Raona si un cercle pot generar una esfera. Quants eixos de gir pot tenir?

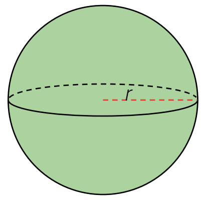
SABER FER

Obtenir el desenvolupament pla dels cossos rodons

Dibuixa el desenvolupament pla d'aquests cossos rodons.

a)


b)


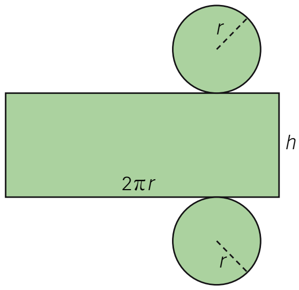
c)


Passos que cal seguir

1. Identifiquem quin tipus de cos rodó és.

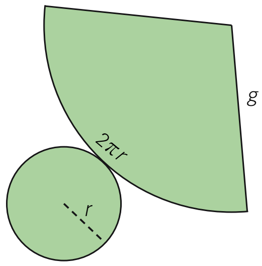
a) Cilindre b) Con c) Esfera

2. Si és un **cilindre**:
- Dibuixem el cercle d'una base.
- Dibuixem la superfície lateral unida a la base: un rectangle amb el costat enganxat a la base de longitud $2\pi r$.
- Dibuixem la segona base sobre el rectangle.

a)


El **desenvolupament pla** d'un **cilindre** està format per:
- Un rectangle que té com a base la longitud de la circumferència de la base, i l'altura és la del cilindre.
- Dos cercles iguals que constitueixen les bases.

3. Si és un **con**:
- Dibuixem el cercle de la base.
- Dibuixem la superfície lateral unida a la base: un sector circular de longitud $2\pi r$.

b)


El **desenvolupament pla** d'un **con** està format per:
- Un sector circular de longitud $2\pi r$ (en què r és el radi de la base), i com a radi la generatriu del con.
- Un cercle.

4. Si és una **esfera**:
- No té desenvolupament pla.

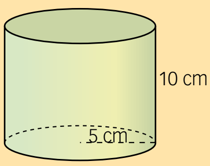
c) No podem dibuixar el desenvolupament pla d'una esfera.

ACTIVITATS

35 Dibuixa el desenvolupament pla d'un con de 2 cm de radi i 5 cm de generatriu.

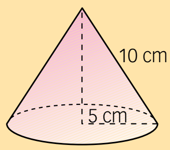
36 Dibuixa el desenvolupament pla d'un cilindre d'altura 3 cm i radi 1 cm.

37 Quines figures formen el desenvolupament d'aquest cilindre?

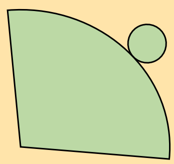


38 Considera el desenvolupament del con. Quina relació trobes entre la longitud de l'arc del sector circular i la longitud de la circumferència de la base del con?

39 Quines figures formen el desenvolupament d'aquest con?



40 Troba l'error que hi ha en aquests desenvolupaments. Corregeix-los a la llibreta.

a)


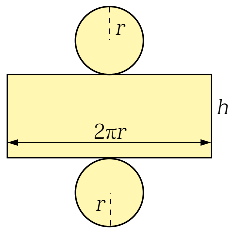
b)


7 Àrea dels cossos de revolució

A partir del desenvolupament pla d'un cilindre i d'un con en podem calcular l'àrea.

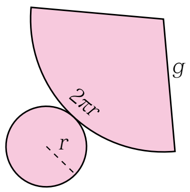
- **Àrea lateral** d'un **cilindre**, A_L

  És l'àrea d'un rectangle que té com a base la longitud de la circumferència de la base, $2\pi r$, i l'altura, h, és l'altura del cilindre: $A_L = 2\pi r \cdot h$.



- **Àrea** de les **bases** d'un **cilindre**, A_B

  Com que les bases són cercles, cada base tindrà una àrea de: $A_B = \pi r^2$.



- **Àrea lateral** d'un **con,** A_L

  És l'àrea d'un sector circular de longitud $2\pi r$ i radi g:

  $$\lceil a^2 = 25$$

- **Àrea** de la **base** d'un **con,** A_B

  És l'àrea del cercle: $A_B = \pi r^2$.

- L'**àrea total** d'una **esfera** de radi r és: $A_T = 4\pi r^2$.

Àrea total d'un **cilindre**:

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$

$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Àrea total d'un **con**:

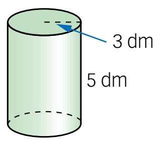
$A_T = A_L + A_B$

$A_T = \pi rg + \pi r^2$

EXEMPLE

7. Calcula l'àrea total d'aquests cossos rodons:

a)

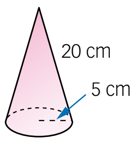


$A_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2\ \text{dm}^2$

$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28{,}26\ \text{dm}^2$

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 94{,}2 + 2 \cdot 28{,}26 = 150{,}72\ \text{dm}^2$

b)

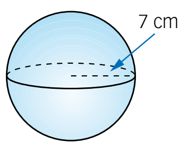


$A_L = \pi rg = \pi \cdot 5 \cdot 20 = 314\ \text{cm}^2$

$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5\ \text{cm}^2$

$A_T = A_L + A_B = 314 + 78{,}5 = 392{,}5\ \text{cm}^2$

c)



$A_T = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 7^2 = 615{,}44\ \text{cm}^2$

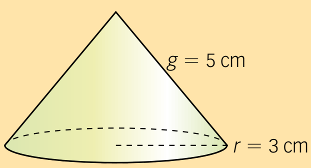
T'HI ATREVEIXES?

Tenim un con i un cilindre tots dos de radi r. Quina relació hi ha d'haver entre la generatriu del con i l'altura del cilindre per tenir la mateixa superfície lateral?

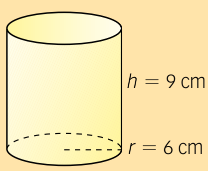
ACTIVITATS

41 **PRACTICA.** Calcula l'àrea total de les figures següents:

a)



b)



42 **APLICA.** El radi i la generatriu d'un cilindre i un con mesuren 4 cm i 7 cm. Quantes vegades és més gran l'àrea del cilindre que l'àrea del con?

43 **REFLEXIONA.** Un dipòsit esfèric té un radi de 10 m. Si el volem pintar, i amb cada quilo de pintura en tenim per a 3 m^2, quants quilos de pintura ens faran falta?

CLAUS PER COMENÇAR

Unitats de volum

En les unitats de volum, cada unitat és 1.000 vegades més gran que la immediata inferior i 1.000 vegades més petita que la immediata superior.

EXEMPLE

Múltiples del metre cúbic				Submúltiples del metre cúbic		
quilòmetre cúbic km^3 1.000.000.000 m^3	hectòmetre cúbic hm^3 1.000.000 m^3	decàmetre cúbic dam^3 1.000 m^3	**metre cúbic m^3**	decímetre cúbic dm^3 0,001 m^3	centímetre cúbic cm^3 0,000001 m^3	mil·límetre cúbic mm^3 0,000000001 m^3

ACTIVITATS

1 Copia i completa aquestes equivalències:

a) 3 km^3 = ______ m^3

b) 1.200 dm^3 = ______ m^3

c) 0,07 hm^3 = ______ m^3

d) 40.000 cm^3 = ______ m^3

Transformació d'unitats de volum

Per passar d'una unitat de volum a una altra, multipliquem o dividim successivament per 1.000.

$$km^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} m^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

EXEMPLE

Transforma en decàmetres cúbics.

a) 46 hm^3 → 46 · 1.000 = 46.000 dam^3

b) 82 m^3 → 82 : 1.000 = 0,082 dam^3

c) 5,6 km^3 → 5,6 · 1.000 · 1.000 = 5.600.000 dam^3

d) 4,3 dm^3 → 4,3 : 1.000 : 1.000 = 0,0000043 dam^3

ACTIVITATS

2 Expressa en la mesura indicada.

Decímetres cúbics

a) 5,32 m^3

b) 1.330.000 mm^3

c) 0,05021 hm^3

Hectòmetres cúbics

d) 13,23 km^3

e) 2,501 dam^3

f) 12.856 dm^3

3 Ordena de més gran a més petit.

32,45 m^3 2.205,3 cm^3 0,2 hm^3 2.000.002 mm^3

370 dC
Hipàtia d'Alexandria va néixer a Alexandria, Egipte. El seu pare, Teó, la va instruir en astronomia, filosofia i matemàtiques. També va fomentar que es formés al Museu d'Alexandria, una institució dedicada a la investigació i l'ensenyament, en la qual va treballar i fins i tot la va acabar dirigint.

Va morir assassinada l'any 415 dC.

Volum dels cossos geomètrics

6

SABER

- Volum d'un cos
- Relació entre les unitats de volum, capacitat i massa
- Volum dels poliedres
- Volum dels cossos de revolució

SABER FER

- Transformar unitats mitjançant factors de conversió
- Resoldre problemes d'omplir i buidar amb unitats diferents

? INTERPRETA LA IMATGE

Hipàtia d'Alexandria

És la primera dona pensadora de la qual s'obtenen coneixements segurs i detalls de la seva vida i obra.

Se li atribueix la invenció del primer hidròmetre graduat; aparell que servia per mesurar la densitat relativa (relació entre la massa i el volum d'un cos) dels líquids sense haver-ne de mesurar ni la massa ni el volum prèviament.

- Sabem que la densitat de l'alcohol que hi ha en un recipient és de 0,7 g/cm^3. Si la massa de l'alcohol és de 140 g, quin volum l'alcohol hi ha al recipient?

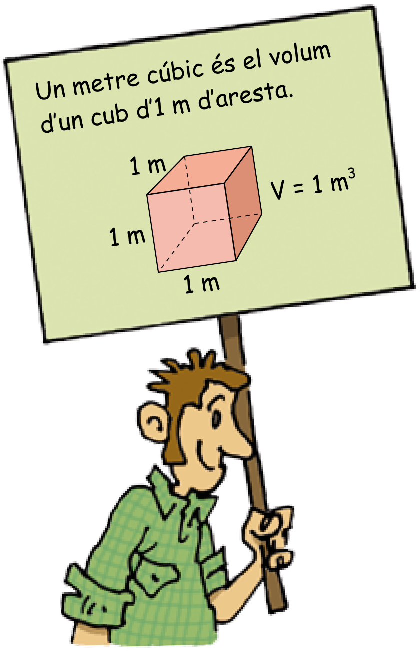
Hipàtia i l'ensenyament
La casa d'Hipàtia era un centre d'instrucció d'alumnes aristòcrates pagans i cristians, alguns dels quals van ocupar càrrecs importants dins la societat de l'època, com per exemple Sinesi de Cirene.

Hipàtia i l'aritmètica
Va reproduir l'obra *Aritmètica* de Diofant d'Alexandria (S. III). Hi va afegir comentaris propis, exemples, nous problemes i diferents solucions a les equacions indeterminades i quadràtiques; així doncs, va contribuir que aquesta obra amb successives còpies al llarg dels anys per part d'altres autors perdurés fins als nostres dies.

Hipàtia i la geometria
Estava molt interessada en la geometria i va escriure una obra titulada *Sobre la geometria de les còniques d'Apoloni*, en la qual feia una adaptació de l'obra d'Apoloni de Perga i descrivia les figures geomètriques que es formen en travessar un pla per un conus.

Hipàtia i l'astronomia
Va escriure *El cànon astronòmic*, on hi ha el càlcul dels moviments dels astres descrits per Ptolomeu.

A les cartes que es conserven del seu estudiant Sinesi de Cirene, es troba el disseny d'un astrolabi pla que servia per mesurar la posició de les estrelles, els planetes i el Sol.



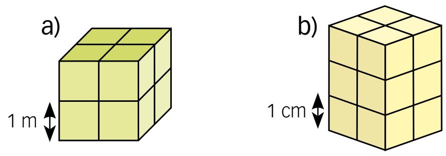
1 Volum d'un cos

El **volum d'un cos** és la quantitat d'espai que ocupa.

El metre cúbic és la unitat principal de mesura de volum.

EXEMPLE

1. Determina el volum d'aquests cossos:



a) El cub està format per cubs més petits d'1 m d'aresta.

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cubs d'1 m de costat

El volum del cub és 8 m^3.

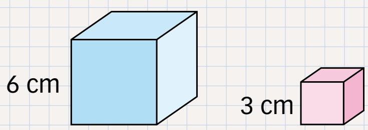
b) El prisma està format per cubs més petits d'1 cm d'aresta. Conté:

$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ cubs d'1 cm de costat

Per tant, el volum és 12 cm^3.

T'HI ATREVEIXES?

Determina quantes vegades és més petit el volum del cub rosa que el del cub blau.



1.1. Forma complexa i incomplexa

Les mesures de volum es poden expressar de **forma incomplexa**, en una sola unitat, o de **forma complexa**, amb diverses unitats.

EXEMPLES

2. Expressa 12.514, 31 dm^3 en forma complexa.

hm^3	dam^3	m^3	dm^3
	12	514	310

→ 12 dam^3 514 m^3 310 dm^3

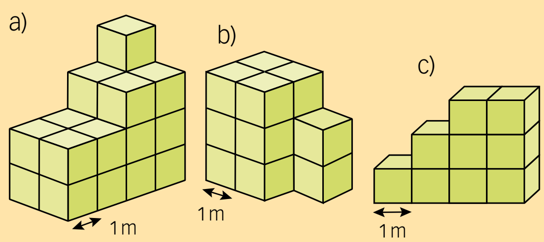
3. Expressa 3 km^3 42 hm^3 120 dam^3 en forma incomplexa.

km^3	hm^3	dam^3	m^3
3	042	120	000

→ 3.042,12 hm^3
→ 3.042.120 dam^3
→ 3.042.120.000 m^3

ACTIVITATS

1 PRACTICA. Determina el volum d'aquests cossos:



2 APLICA. Expressa en metres cúbics.

a) 4 km^3 34 hm^3 22 dam^3

b) 125 dm^3 880 cm^3 516 mm^3

3 APLICA. Expressa de forma complexa 120,56 m^3 i 1.523,003 dam^3.

4 REFLEXIONA. Quant mesura el volum d'un cub de 3 cm d'aresta? Expressa el resultat en m^3.

SABER FER

Transformar unitats mitjançant factors de conversió

Expressa aquests volums en la unitat indicada:

a) 1.752,3 dm³ a m³ **b) 1,2 hm³ a m³** **c) 10.908 m³ a dam³**

Passos que cal seguir

1. Trobem l'equivalència entre la unitat en què està expressat el volum i la unitat en què el volem transformar:
   - Identifiquem quantes vegades l'hem de multiplicar per 1.000 i escrivim l'equivalència entre les unitats.

Esbrinem les vegades que hem de multiplicar per 1.000 i ho anotem:

$$\text{km}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{hm}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{dam}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{m}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{dm}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{cm}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{mm}^3$$

a) 1.752,3 dm³ a m³ → 1 m³ = 1.000 dm³

b) 1,2 hm³ a m³ → 1 hm³ = 1.000 · 1.000 = 1.000.000 m³

c) 10.908 m³ a dam³ → 1 dam³ = 1.000 m³

2. Escrivim la fracció que determina el factor de conversió:
   - En el **denominador** posem la unitat que volem simplificar.
   - En el **numerador** la nova unitat en què volem expressar el volum.

a) 1.752,3 dm³ a m³ → $\dfrac{1\ \text{m}^3}{1.000\ \text{dm}^3}$

b) 1,2 hm³ a m³ → $\dfrac{1.000.000\ \text{m}^3}{1\ \text{hm}^3}$

c) 10.908 m³ a dam³ → $\dfrac{1\ \text{dam}^3}{1.000\ \text{m}^3}$

Un **factor de conversió** és una fracció tal que el numerador i el denominador són equivalents, però estan expressats en unitats diferents.

3. Multipliquem la quantitat que volem transformar pel factor de conversió, simplifiquem les unitats i efectuem les operacions.

a) $1.752{,}3\ \cancel{\text{dm}^3} \cdot \dfrac{1\ \text{m}^3}{1.000\ \cancel{\text{dm}^3}} = 1{,}752\ \text{m}^3$

b) $1{,}2\ \cancel{\text{hm}^3} \cdot \dfrac{1.000.000\ \text{m}^3}{1\ \cancel{\text{hm}^3}} = 1.200.000\ \text{m}^3$

c) $10.908\ \cancel{\text{m}^3} \cdot \dfrac{1\ \text{dam}^3}{1.000\ \cancel{\text{m}^3}} = 10{,}908\ \text{dam}^3$

Podem escriure nombres molts grans de manera més senzilla en **notació científica** fent servir potències de 10:
1.200.000 m³ = $1{,}2 \cdot 10^6$ m³

ACTIVITATS

5 Expressa 52,7 m³ en mm³.

6 Transforma en decímetres cúbics.

a) 752 cm³ c) 7,02 m³

b) 0,23 dam³ d) 12,56 hm³

7 Ordena de més petita a més gran aquestes quantitats:

1.575,2 dam³ 0,1573 km³ 15.700 m³ 1,57 hm³

8 Una nau industrial té un volum de 24,23 hm³. Quin és el volum de la nau en metres cúbics?

9 Indica, en cada cas, quins errors s'han comès.

a) $325{,}12\ \cancel{\text{cm}^3} \cdot \dfrac{10.000\ \text{m}^3}{1\ \cancel{\text{cm}^3}} = 3.251.000\ \text{m}^3$

b) $657{,}6\ \cancel{\text{dam}^3} \cdot \dfrac{1\ \text{m}^3}{1\ \cancel{\text{dam}^3}} = 0{,}6576\ \text{m}^3$

c) $12{,}5\ \cancel{\text{m}^3} \cdot \dfrac{1.000.000\ \text{cm}^3}{1\ \cancel{\text{m}^3}} = 1{,}25 \cdot 10^4\ \text{dam}^3$

10 Fes els canvis d'unitats següents:

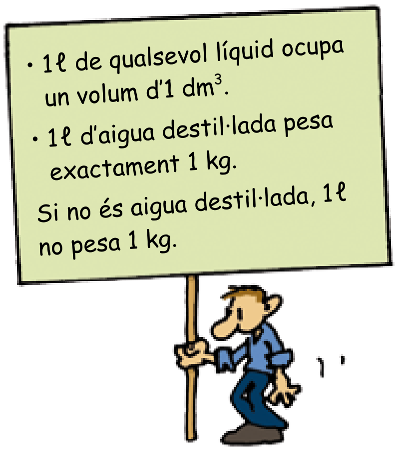
a) 0,073 cm³ a dm³ c) 750 cm³ a m³

b) 2,07 km³ a dam³ d) 20.000 dm³ a dam³

2 Relació entre les unitats de volum, capacitat i massa

T'HI ATREVEIXES?

Quantes gerres de litre podrem omplir amb 12 llaunes de 33 cl de refresc?



RECORDA

La **tona**, el **quintar** i el **miriagram** són submúltiples del kg.

1 t = 1.000 kg

1 q = 100 kg

1 mag = 10 kg

2.1. Volum i capacitat

Quan es va establir el sistema mètric decimal, es va definir el litre com la capacitat d'un cub d'1 dm d'aresta, és a dir, 1 dm^3.

Un **litre** és la capacitat d'un cub d'1 dm d'aresta.

$$1\ dm^3 = 1\ \ell$$

Les equivalències entre les unitats de volum i capacitat són:

Unitats de volum	m^3			dm^3			cm^3
Unitats de capacitat	kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml

2.2. Volum i massa

Un litre d'aigua destil·lada pesa 1 kg. Com que 1 ℓ = 1 dm^3, el pes d'1 dm^3 d'aigua destil·lada és d'1 kg.

Un **quilo** és la massa que té 1 dm^3 d'aigua destil·lada.

1 dm^3 = 1 kg d'aigua destil·lada

Les equivalències entre les unitats de volum i massa són:

Unitats de volum	m^3			dm^3			cm^3
Unitats de massa	t	q	mag	kg	hg	dag	g

EXEMPLE

4. Expressa aquestes mesures de volum d'aigua destil·lada en litres i quilos:

a) **105,2 dm^3** = 105,2 ℓ = 105,2 kg

b) **50,8 m^3** = 50,8 kl = 50.800 ℓ   50,8 m^3 = 50,8 t = 50.800 kg

c) **750 cm^3** = 750 ml = 0,75 ℓ   750 cm^3 = 750 g = 0,75 kg

ACTIVITATS

11 **PRACTICA.** Transforma en decímetres cúbics.

a) 2,3 hl   c) 1.023 dl

b) 32,5 cl   d) 0,3 dal

12 **PRACTICA.** Expressa en quilos les mesures d'aigua destil·lada següents:

a) 320 cm^3 c) 7.501 dal

b) 9,52 cl   d) 1.200 mm^3

13 **APLICA.** Calcula la capacitat en centilitres d'una cassola que pot contenir fins a vessar 90 g d'aigua destil·lada.

14 **REFLEXIONA.** Quants gots de 200 cm^3 podrem omplir amb una ampolla d'aigua d'1,5 ℓ?

15 **REFLEXIONA.** Un dipòsit d'aigua està al 70 % de la seva capacitat amb 3,5 kl 6 hl 80 dal. Expressa en litres i en metres cúbics la capacitat del dipòsit.

SABER FER

Resoldre problemes d'omplir i buidar amb unitats diferents

Una aixeta aboca 140 ℓ/min.

Quant triga a omplir un dipòsit de 9 m³ 800 dm³?

Passos que cal seguir

1. Transformem totes les quantitats a la mateixa unitat.

Transformem les unitats en decímetres cúbics.

- Aixeta:

$$140 \frac{\ell}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{dm}^3}{\ell} = 140\ \text{dm}^3 / \text{min}$$

- Dipòsit:

$$9\ \text{m}^3\ 800\ \text{dm}^3 = 9.000\ \text{dm}^3 + 800\ \text{dm}^3 =$$
$$= 9.800\ \text{dm}^3$$

Per fer canvis d'unitats podem utilitzar els factors de conversió:

$\ell/\text{min} \rightarrow \text{dm}^3/\text{min}$

$$1 \frac{\ell}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{dm}^3}{\ell} = 1\ \text{dm}^3 / \text{min}$$

2. Plantegem una regla de tres amb les dades del problema.

volum		*temps*
Si 140 dm³	$\xrightarrow{\text{s'omple en}}$	1 min
9.800 dm³	$\xrightarrow{\text{s'omplirà en}}$	*x* min

3. Resolem la regla de tres i n'interpretem el resultat.

Les magnituds *volum* i *temps* són directament proporcionals.

Resolem una regla de tres simple directa:

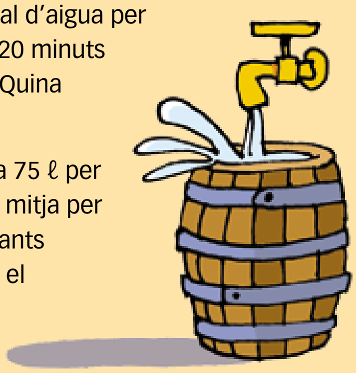
$$\frac{140}{9.800} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{9.800 \cdot 1}{140} = 70$$

L'aixeta triga 70 min en omplir el dipòsit.

ACTIVITATS

16 Una aixeta aboca 6 dal d'aigua per hora, i tarda 1 hora i 20 minuts per omplir una bóta. Quina capacitat té la bóta?



17 Una aixeta que aboca 75 ℓ per minut tarda 2 hores i mitja per omplir un dipòsit. Quants hectolitres entren en el dipòsit?

18 Una bomba d'aigua que extreu 28 m³/min triga 2 hores i mitja a buidar un dipòsit. Quants litres caben al dipòsit?

19 El desguàs d'una piscina de 18 m³ evacua 90 ℓ/min. Quant trigarà en buidar-se?

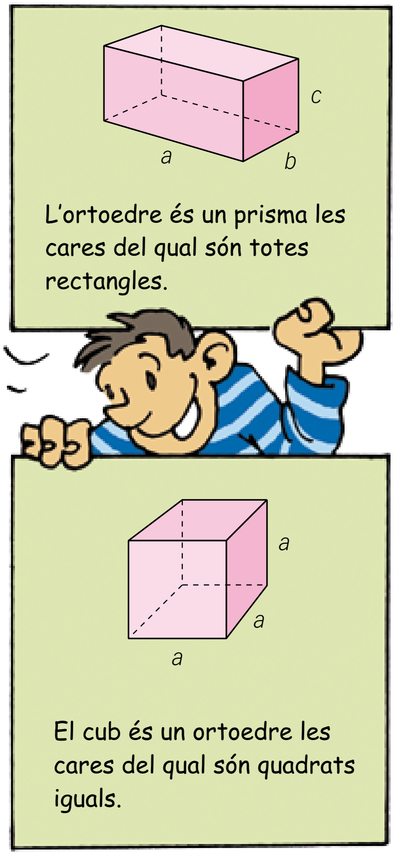
20 Un pantà conté 3.542 milions de m³ d'aigua. A l'estiu perd 875.000 ℓ per dia.

a) Quants metres cúbics perdrà en 60 dies?

b) Quants metres cúbics hi quedaran al cap de 20 dies?

21 Quants metres cúbics d'aigua es consumeixen en buidar 8 vegades al dia una cisterna de 7,5 ℓ durant tot un mes?

3 Volum dels poliedres



3.1. Volum de l'ortoedre

El volum de l'ortoedre és igual al producte de les seves tres dimensions.

El **volum** d'un **ortoedre** d'arestes a, b, c és:

$$V_{\text{ortoedre}} = \text{llarg} \cdot \text{ample} \cdot \text{alt} = a \cdot b \cdot c$$

Com que el producte $a \cdot b$ és l'àrea del rectangle de la base A_B, el volum de l'ortoedre és: $V_{\text{ortoedre}} = a \cdot b \cdot c = A_B \cdot c$

EXEMPLE

5. Calcula el volum d'un ortoedre en què els costats de la base fan 6 cm i 2 cm i l'altura, 5 cm.

$$V_{\text{ortoedre}} = a \cdot b \cdot c \rightarrow V = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$$

3.2. Volum del cub

El cub té les seves tres dimensions iguals: llarg, ample i alt.

El **volum** d'un **cub** d'aresta a és:

$$V_{\text{cub}} = \text{llarg} \cdot \text{ample} \cdot \text{alt} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

EXEMPLE

6. Calcula el volum d'un cub l'aresta del qual mesura 3,5 dm.

$$V_{\text{cub}} = a^3 \rightarrow V = 3{,}5^3 = 42{,}875 \text{ dm}^3$$

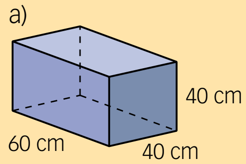
T'HI ATREVEIXES?

Quina quantitat d'aigua s'obté quan es desfà un glaçó de gel de 5 cm d'aresta?

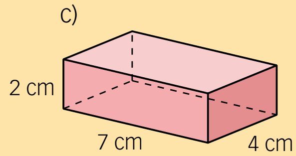
ACTIVITATS

22 **PRACTICA.** Determina el volum d'aquests cossos:

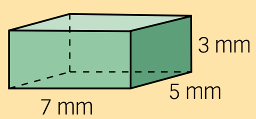
a)



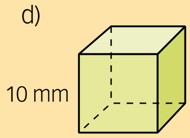
c)



b)



d)



23 **APLICA.** Calcula el volum d'una piscina que té 12 m de llarg, 9 m d'ample i 2 m de profunditat. Expressa el resultat en m^3 i en litres.

24 **REFLEXIONA.** La suma de totes les arestes d'un cub és 60 cm. Quin és el seu volum? Expressa el resultat en centímetres cúbics i litres.

25 **REFLEXIONA.** En un magatzem de 5 m de llarg, 3 m d'ample i 2 m d'altura volem posar-hi caixes d'1 m de llarg, 6 dm d'ample i 4 dm d'altura. Quantes caixes hi podem apilar?

3.3. Volum d'un prisma

El volum d'un prisma és igual al producte de l'àrea de la seva base per l'altura.

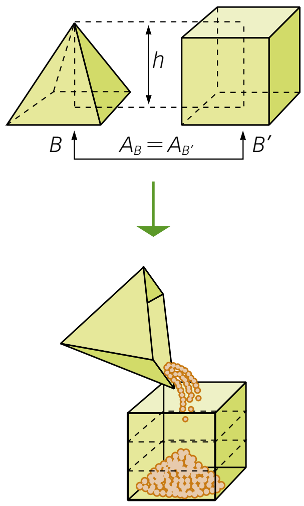
El **volum** d'un **prisma** d'altura h i àrea de la base A_B és:

$$V_{\text{prisma}} = A_B \cdot h$$

3.4. Volum d'una piràmide

La piràmide i el prisma de la dreta tenen la mateixa altura, h, i també la mateixa base, B.

Si omplim la piràmide amb sorra fina, comprovem que per emplenar el prisma necessitaríem el contingut de tres piràmides. El volum de la piràmide és la tercera part del volum del prisma.



El **volum** d'una **piràmide** d'altura h i àrea de la base A_B, és:

$$V_{\text{piràmide}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

EXEMPLE

7. Calcula el volum del prisma regular pentagonal i de la piràmide triangular de la dreta.

a) Prisma regular:

$$V_{\text{prisma}} = A_B \cdot h \rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot a}{2} \cdot h$$

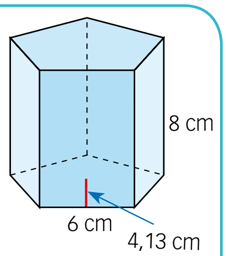
$$V_{\text{prisma}} = \frac{(5 \cdot 6) \cdot 4{,}13}{2} \cdot 8 = 495{,}6 \text{ cm}^3$$

b) Piràmide:

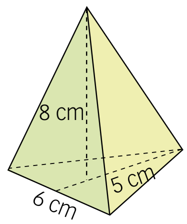
$$V_{\text{piràmide}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h \rightarrow V_{\text{piràmide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b \cdot a}{2} \cdot h$$

$$V_{\text{piràmide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 8 = \frac{240}{6} = 40 \text{ cm}^3$$

a)



b)



RECORDA

L'àrea d'un polígon regular és:

$$A = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2}$$

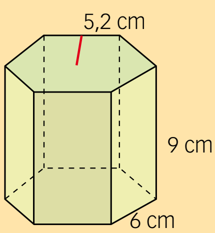
L'àrea d'un triangle és:

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

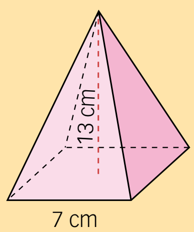
ACTIVITATS

26 **PRACTICA.** Determina el volum del prisma i la piràmide següents:

a)



b)



Quin dels dos cossos té un volum més gran?

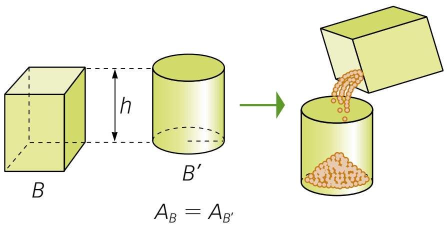
27 **PRACTICA.** Calcula el volum d'una piràmide regular hexagonal de 12 cm d'altura i 6 cm d'aresta de la base.

28 **APLICA.** Calcula el volum d'un prisma regular de base heptagonal, sabent que l'altura són 9 cm, el costat de la base mesura 7 cm i l'apotema, 6,06 cm.

29 **REFLEXIONA.** Calcula el volum d'aigua màxim que podrem posar en una peixera de base quadrada de 40 cm d'aresta i alçada la meitat que l'amplada.

4 Volum dels cossos de revolució

4.1. Volum d'un cilindre



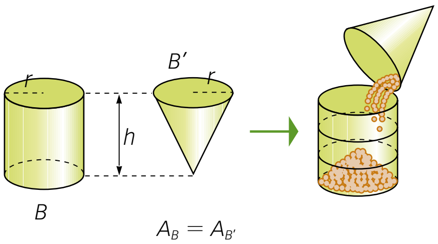
L'ortoedre i cilindre de l'esquerra tenen la mateixa altura i bases diferents amb la mateixa superfície.

Si omplim amb sorra fina l'ortoedre i l'aboquem en el cilindre, comprovem que hi cap exactament la mateixa quantitat. El volum de l'ortoedre és el mateix que el del cilindre.

El **volum** d'un **cilindre** de radi r i altura h és:

$$V_{\text{cilindre}} = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

4.2. Volum d'un con



El cilindre i el con de l'esquerra tenen la mateixa altura h i igual base B.

Si omplim amb sorra fina el con i la buidem en el cilindre, comprovem que per omplir-lo necessitem el contingut de tres cons. El volum del con és la tercera part del volum del cilindre.

El **volum** d'un **con** de radi r i altura h és:

$$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

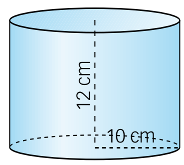
RECORDA

L'àrea d'un cercle és:

$$A = \pi \cdot r^2$$

EXEMPLES

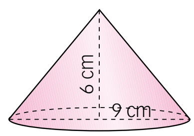
8. Calcula el volum d'un cilindre de 10 cm de radi i 12 cm d'altura.



$V_{\text{cilindre}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{\text{cilindre}} = \pi \cdot 10^2 \cdot 12 = 3.768 \text{ cm}^3$

9. Calcula el volum d'un con de 9 cm de diàmetre i 6 cm d'altura.



$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 6 = 127{,}17 \text{ cm}^3$

ACTIVITATS

30 **PRACTICA.** Calcula el volum d'aquests cossos de revolució:

a) Con amb base de 6 dm de diàmetre i altura 95 cm.

b) Cilindre que té com a radi de la base 320 mm i una altura de 52 cm.

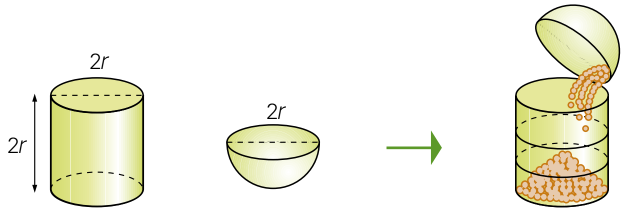
31 **APLICA.** Calcula el volum d'un con l'altura del qual és 24 cm i el diàmetre de la base és dos terços de l'altura.

32 **REFLEXIONA.** Quina és l'àrea de la base d'un cilindre amb una altura de 7 cm i que té el mateix volum que un cub de 2 cm d'aresta?

4.3. Volum d'una esfera

El volum d'una esfera el determinem a partir d'un cilindre que tingui l'altura i el diàmetre iguals al diàmetre de l'esfera.

Diàmetre esfera = Diàmetre cilindre = Altura del cilindre = $2r$



Si omplim amb sorra fina la semiesfera i la buidem en el cilindre, comprovem que hi caben tres semiesferes de sorra. El volum de la meitat de l'esfera és un terç del volum del cilindre.

Així doncs, el volum de l'esfera ha de ser igual a dos terços del volum del cilindre.

$$V_{\text{esfera}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{cilindre}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

El **volum** d'una **esfera** de radi r és:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

EXEMPLE

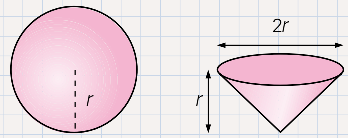
10. Calcula el volum d'una pilota de tennis de 7 cm de diàmetre.

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \rightarrow V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}5^3 = 179{,}5\ \text{cm}^3$

El volum de la pilota de tennis és 179,5 cm^3.

T'HI ATREVEIXES?

Quina relació hi ha entre el volum d'una esfera de radi r i un con amb radi de la base r i altura igual al radi?



ACTIVITATS

33 **PRACTICA.** Troba el volum d'aquestes esferes:

a) $r = 15$ cm

b) $d = 1{,}5$ mm

c) $r = 0{,}23$ m

d) $d = 0{,}1$ dam

Expressa els resultats en decímetres cúbics.

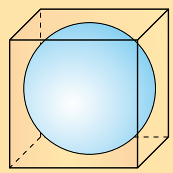
34 **APLICA.** Considera una esfera i un cilindre en els quals el diàmetre de l'esfera (8 cm) és igual al de la base del cilindre i igual a l'altura del cilindre.

a) Calcula els volums dels dos cossos.

b) Quina relació hi ha entre els volums?

35 **APLICA.** Una semiesfera té un diàmetre de 18 cm. Calcula'n el volum.

36 **REFLEXIONA.** Calcula el volum comprès entre un cub de 5 cm d'aresta i l'esfera que hi està inscrita.



37 **REFLEXIONA.** Calcula el volum comprès entre un cilindre de 12 cm d'altura i 6 cm de radi de la base i l'esfera que hi està inscrita.