

**PROBABILITAT**  
**MATEMÀTIQUES FUNCIONALS**  
**4T ESO**



**Alumne:** \_\_\_\_\_

## UNITAT: PROBABILITATS I ATZAR

### 1. Experiments aleatoris i deterministes:



Les accions que realitzem durant la nostra vida, no sempre tenen un resultat definit. Si llancem una bola massissa de ferro en un estany d'aigua, segur que s'enfonsarà.

Si Tirem una pedra amunt, sabem que caurà al cap d'una estona. Aquests tipus d'experiments, diem que són deterministes, doncs sabem sempre el resultat.

Però, si llancem un dau, no sabem si sortirà un 1, 2, 3,... o bé si llancem una moneda, no sabem amb certesa si sortirà cara o creu. D'aquests experiments en els que no sabem el resultat segur, en diem aleatoris.

#### 1.1. Espai mostral:

Quan fem un experiment aleatori, cal saber en primer lloc, tots els possibles resultats que es poden esdevenir.

<http://www.youtube.com/watch?v=n08JPdUkOGo&feature=relmfu>

Aquest conjunt de resultats possibles, s'anomena espai mostral i es representa mitjançant la lletra grega  $\Rightarrow \Omega$

Així  $\Rightarrow$

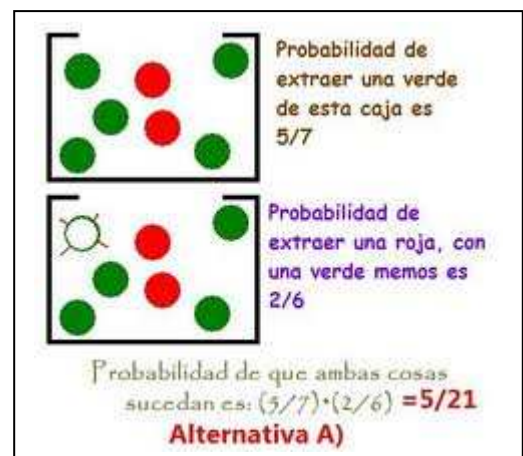
En el cas del dau tindriem  $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

En el cas de la moneda  $\Rightarrow \Omega = \{\text{cara, creu}\} \Rightarrow \Omega = \{c, +\}$

#### 1.2. Esdeveniments: Tipus:

Entenem per esdeveniment, cadascuna de les situacions o casos que es poden estudiar en un esdeveniment aleatori i que correspon a una part de l'espai mostral -  $\Omega$ .

Així, en l'exemple del dau  $\Rightarrow$  Sortir 5, sortir parell, sortir múltiple de 3, sortir divisor de sis, sortir parell o múltiple de tres, sortir parell i múltiple de tres,... són esdeveniments que formen part de l'espai mostral.



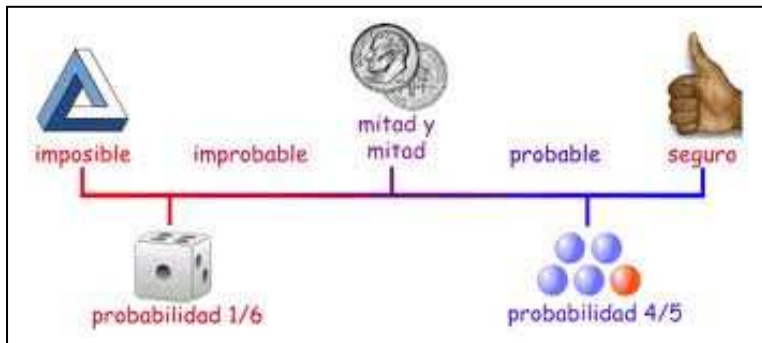
##### 1.2.1. Esdeveniment segur i impossible:

L'esdeveniment que succeeix o que ocorre sempre, és un esdeveniment segur.

Per exemple, treure un nombre més petit de 7 en tirar un dau. Tots els nombres de l'espai mostral són més petits de 7, per tant és un esdeveniment segur.

Per tant, quan l'esdeveniment coincideix amb l'espai mostral, direm que és un esdeveniment segur.

Quan el succés que volem que passi, no succeeix mai, direm que l'esdeveniment és impossible.



Per exemple, si en tirar un dau volem que surti cara, aquest esdeveniment no pot ocórrer mai, o bé si en tirar dos daus volem que sumin 13, com que el nombre més gran en el dau és el 6, els dos daus sumaran com a màxim 12, per tant l'esdeveniment és impossible.

### 1.3. Freqüència absoluta i relativa d'un esdeveniment:

El nombre de vegades que succeeix un esdeveniment en realitzar un experiment aleatori, s'anomena freqüència absoluta de l'esdeveniment. Així si tirem 10 vegades una moneda i m'han sortit 4 cares i 6 creus, direm que la freqüència absoluta de sortir cara és 4 i de sortir creu  $\Rightarrow$  6.

Entendrem per freqüència relativa, el quocient entre la freqüència absoluta i el nombre total d'experiments aleatoris realitzats. Així, si mirem l'exemple anterior, d'ell, podem deduir que la freqüència relativa de sortir cara és  $4/10 \Rightarrow 0,4$  i la de sortir creu  $\Rightarrow 6/10 \Rightarrow 0,6$

La freqüència relativa sempre és un nombre que està entre 0 i 1, això és  $\Rightarrow$

$$0 \leq f_r \leq 1$$

### 2. Concepte de probabilitat:

El fet que passi o no un determinat esdeveniment i en quina mesura, donarà lloc al que anomenem probabilitat.

El fet de que sigui més probable o no, pot donar lloc a conceptes com molt probable, probable, poc probable, improbable,...

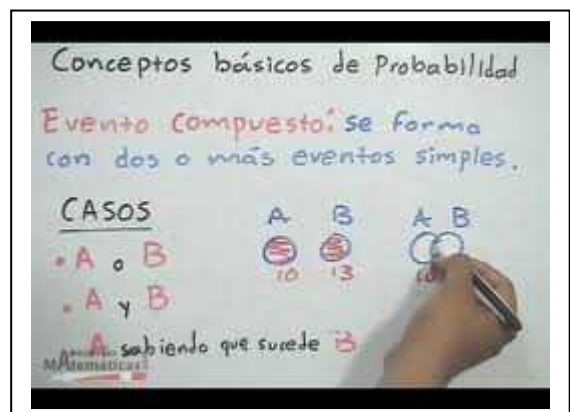
Un esdeveniment qualsevol es determina abreviadament com "A" i per tant la probabilitat de que passi serà  $P(A)$ , que s'entén com probabilitat d'A.

Tots els esdeveniments, tenen una probabilitat que està entre el zero i l'u, és a dir:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$P(A) = 0 \Rightarrow$  voldrà dir, que l'esdeveniment A no ocorre mai.

$P(A) = 1 \Rightarrow$  voldrà dir, que l'esdeveniment A ocorre sempre.



2.1. Càlcul de la probabilitat: [http://www.youtube.com/watch?v=fM\\_I EAav0AA](http://www.youtube.com/watch?v=fM_I EAav0AA)

Per determinar la probabilitat d'un esdeveniment, observarem la tendència que tenen les freqüències relatives de l'esdeveniment. De l'exemple anterior, veiem que la freqüència relativa de treure cara, havia estat de 0,4, doncs en tirar 10 cops la moneda, havia sortit en 4 ocasions, cara.

$$\text{Per tant } \Rightarrow P(A) = \frac{\text{Casos favorables } \Rightarrow \text{CF}}{\text{Casos possibles } \Rightarrow \text{CP}} \Rightarrow P(A) = \frac{\text{CF}}{\text{CP}}$$

Aquest quocient, es coneix com a regla de Laplace.

2.2. Proves repetides:

Els experiments aleatoris que es repeteixen múltiples vegades, s'anomenen proves repetides.

C	C	C	CCC
		+	<b>CC +</b>
	+	C	<b>C + C</b>
		+	C ++
+	C	C	<b>+ CC</b>
		+	+ C +
	+	C	++ C
		+	+++

Així si tirem una moneda tres vegades, i volem saber la probabilitat que hi ha d'obtenir dues cares, farem un diagrama d'arbre en el que posarem totes les possibilitats que hi ha, és a dir, farem l'espai mostral total.

Diem-li A, a l'esdeveniment, treure dues cares.

Probabilitat d'obtenir dues cares  $\Rightarrow P(A)$

Casos favorables  $\Rightarrow 3$  (Veieu-los en negreta i cursiva)

Casos possibles  $\Rightarrow 8$

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

Aquest mateix diagrama ens serviria, si en lloc de tirar una moneda tres vegades, tiréssim les tres monedes a la vegada.

2.3. Successos dependents i independents:

L'esdeveniment  $\Rightarrow \cap \Rightarrow$  "i"

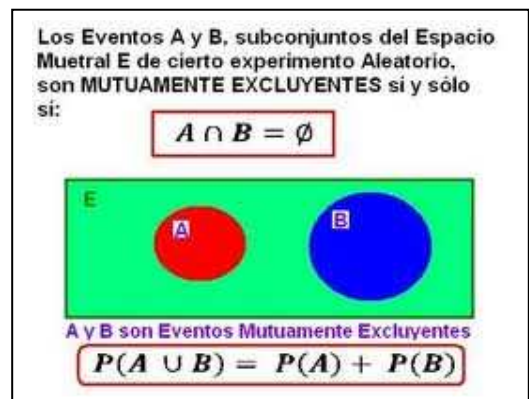
Quan volem que succeeixi un esdeveniment i un altre a la vegada o quan volem que passin dues coses a la vegada, utilitzarem  $\Rightarrow \cap$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

l'esdeveniment  $\Rightarrow \cup \Rightarrow$  "o"

Quan fem estudis en més d'un esdeveniment, caldrà tenir present, si existeix o no dependència entre els successos. Diem que un succés és independent, quan no depèn del succés anterior.

Per exemple, si tenim una urna amb boles blanques, vermelles i negres i volem calcular la probabilitat de treure una bola blanca o una de vermella.



En canvi en una baralla de cartes, l'esdeveniment que surti espases o figures, és un succés dependent, doncs hi ha cartes que són a la vegada d'espases i són figures.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \text{Si són independents}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \text{Si són dependents}$$

<http://www.youtube.com/watch?v=JJkRnso1sZs&feature=relmfu>

Exemple:

Tenim una baralla espanyola de 48 cartes, es pregunta: a) Probabilitat d'obtenir una espasa o un basto b) Probabilitat d'obtenir una sota o una espasa.

a)  $P(\text{Espasa o Basto}) \Rightarrow P(E \cup B) \Rightarrow$

El succés és independent, doncs no hi ha cap carta que sigui d'espases i bastos a l'hora,  $\Rightarrow$

$$P(E \cup B) = P(E) + P(B) \Rightarrow 12/48 + 12/48 \Rightarrow 24/48 = 1/2$$

b)  $P(\text{Sota o Espasa}) \Rightarrow P(S \cup E) \Rightarrow$

El succés és dependent, doncs hi ha una carta que aconsegueix les dues coses, la sota d'espases, per tant  $\Rightarrow$

$$P(S \cup E) = P(S) + P(E) - P(S \cap E) \Rightarrow 4/48 + 12/48 - 1/48 \Rightarrow 15/48 = 5/16$$

2.4. Reposició o sense reposició:



Entendrem per reposició, quan després d'haver fet un experiment aleatori, retornem la carta, bola,... de tal manera que l'espai mostral sempre és el mateix i per tant la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol, no varia.

Entendrem per, sense reposició, quan no retornem la carta, bola,... i per tant l'espai mostral disminueix i també canviarà la probabilitat dels esdeveniments aleatoris.

Exemple:

En una urna tenim 3 boles blanques, 4 vermelles i 5 negres. Es demana que calculem: a) La probabilitat de que la primera sigui vermella i la segona blanca amb reposició. b) El mateix, però sense reposició. c) Sense reposició, però les dues blanques.

a)  $P(B \cap V) = P(B) \cdot P(V) \Rightarrow 3/12 \times 4/12 \Rightarrow 12/144 \Rightarrow 1/12$

b)  $P(B \cap V) = P(B) \cdot P(V) \Rightarrow 3/12 \times 4/11 \Rightarrow 12/132 \Rightarrow 1/11$

c)  $P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B) \Rightarrow 3/12 \times 2/11 \Rightarrow 6/132 \Rightarrow 1/22$

<http://www.youtube.com/watch?v=o1FpyQ491E&feature=related>

[http://www.youtube.com/watch?v=A\\_6ITvRACPo&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=A_6ITvRACPo&feature=related)



## ACTIVITATS UNITAT PROBABILITAT

1. Indica quins dels següents experiments són aleatoris i quins no:
- Apagar un interruptor i observar si s'apaga o no el llum.
  - Tirar una moneda i veure que surt.
  - Fer una reacció química i determinar els productes resultants.
  - D'una urna opaca amb boles vermelles, negres i blanques, agafar-ne una i observar el color que traiem.
  - Tirar gasolina en un incendi per veure si s'encén més.
2. Un jugador un pel trampós, fabrica un dau carregat de tal manera que sempre surt el 5. És un experiment aleatori o determinista.
3. Escribe quatre esdeveniments aleatoris i quatre deterministes.
4. Tirem un dau de vuit cares, quin és el seu espai mostral?
5. Tirem un dau dels de póquer. Escribe el seu espai mostral.
6. Escribe l'espai mostral de treure una carta de la baralla espanyola.



7. Digues quins dels següents esdeveniments són impossibles i quins són segurs:

- Tirem una moneda a l'aire i mirem si surt 5.
- Tirem una moneda i volem que surti cara o creu.
- En tirar un dau, que surti parell i senar a la vegada.
- En tirar un dau, que surti parell o senar.
- Faig una aposta amb un amic meu, de la següent manera  $\Rightarrow$  Cada cop que jo guanyi, em donaràs 1 € i cada cop que tu guanyis, et donaré 5 €. Tirarem una moneda a l'aire, si surt cara guanyo jo i si surt creu, perds tu. Com és l'esdeveniment?

8. Tirem un dau, es demana que busqueu la probabilitat d'obtenir: a) El 5. b) Un nombre parell. c) Un nombre senar. d) Múltiple de 3. e) Divisor de 6.

9. Tirem dues monedes a l'hora, probabilitat d'obtenir: a) Dues cares. b) Una creu. c) Cap cara. d)

Una cara. e) Tres cares.

10. En una baralla espanyola de 48 cartes, probabilitat d'obtenir: a) Un rei. b) Una figura. c) Una espasa. d) La sota de bastos. e) Una carta parell.

11. Tirem dos daus, l'espai mostral serà 36, doncs cada una de les cares del dau, es pot combinar amb les altres sis de l'altre dau, per tant els casos possibles seran 36. Calculeu la probabilitat de que entre els dos daus: a) Sumin 2 b) Sumin 4 c) Sumin 7 d) Sumin 10 e) Sumin 11.

12. En una urna opaca tenim 6 boles blanques i 3 de negres. Calculeu la probabilitat de: a) Sortir una bola blanca b) Una bola negra c) Una bola vermella.

13. En un sac tenim 8 mitjons blancs, 6 de blaus i 10 vermells. Calculeu la probabilitat de treure: a) Un mitjó vermell b) Un mitjó blau. c) Un mitjó blanc d) Un mitjó de qualsevol color.

14. Tirem 3 monedes a la vegada, calculeu la probabilitat d'obtenir: a) Tres cares b) Dues creus c) Al menys una cara d) Cap cara e) Al menys dues creus.



15. En una baralla francesa (Té 52 cartes, piques, cors, rombes i trèvols), calculeu la probabilitat d'obtenir: a) Un rei b) Un nombre senar c) Una carta que sigui múltiple de 3 d) La sota de bastos e) Una carta de piques.



16. Tirem un dau, probabilitat de: a) Treure un 3 o un 5 b) Treure un nombre parell o un divisor de 1 c) Treure un nombre senar o un múltiple de 3.

17. Tirem dos daus, probabilitat de: a) Sumin al menys onze b) Menys de dotze c) Sumin menys de 5.

18). Tirem dos daus, probabilitat de: a) En un dau nombre parell i en l'altre també b) Un dau divisor de 6 i l'altre múltiple de 3 c) Un dau senar i l'altre divisor de 4.

19). En una baralla espanyola de 48 cartes, probabilitat d'obtenir: a) Rei o copes. b) Espases o copes c) Figura o ors.

20). En una urna tenim 6 boles blanques i 9 de vermelles, traiem una bola i la retornem i després en traiem una altra, es demana, probabilitat de: a) Treure una bola vermella i una de blanca b) Treure una bola vermella i després una altra també vermella. c) Treure dues boles blanques.

21). En una urna tenim 7 boles blanques i 11 de vermelles, traiem una bola i no la retornem i després en traiem una altra, es demana, probabilitat de: a) Treure una bola vermella i una de blanca b) Treure una bola vermella i després una altra també vermella. c) Treure dues boles blanques.

22). En una urna, tenim 5 boles negres, 6 grogues i 9 verdes. Es demana que trobem la probabilitat de: a) Treure una bola groga i després una de verda, però amb reposició. b) El mateix que l'apartat anterior, però sense reposició. c) Treure primer una bola verda i després una altra de verda, però sense reposició.

23). En una baralla espanyola de 40 cartes (Hem tret els 8 i els 9, per tal de jugar al set i mig), es demana la probabilitat de treure en només dues cartes, set i mig. Recordeu que les figures valen per mig punt.

24). En una baralla espanyola amb 40 cartes, es demana que cerqueu la probabilitat d'obtenir: a) Figura o copes. b) Ors o Espases c) Reis o Figures.

25). Tirem una moneda i un dau, es demana la probabilitat de: a) Sortir cara i divisor de 5. b) Sortir creu o múltiple de 2. c) Sortir creu i divisor de 6.

26). Tirem 4 monedes a la vegada, es demana que feu  $\Rightarrow$  a) El diagrama d'arbre. b) La probabilitat de treure al menys dues cares. c) Una sola cara.

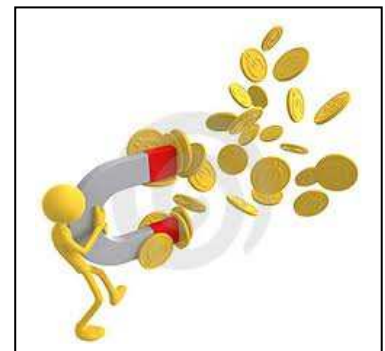
27). Amb l'urna de l'activitat 20 i la baralla espanyola de 40 cartes, es demana que trobeu: a) Probabilitat de que surti una bola blanca i una figura. b) Una bola blanca o una figura. c) Probabilitat de que surti una bola vermella i una copa o una espasa.

28). En una baralla francesa, es demana que busqueu la probabilitat de: a) Sortir rei o piques. b) Sortir Reina o Cavall. c) Figures o trèvols.

29). En una baralla espanyola de 48 cartes, es demana que cerqueu la probabilitat de: a) Sortir una espasa i després una copa amb reposició. b) Una espasa i una copa amb reposició. c) Una espasa i un rei amb reposició.

30). Tenim un dau i una baralla espanyola de 40 cartes, es demana que busqueu la probabilitat de: a) Sortir divisor de 6 o figura, b) Divisor de 6 i figura, c) Múltiple de dos i sota d'espases.

31). Tirem una moneda, un dau i disposem d'una baralla espanyola de 48 cartes. Es demana que busqueu la probabilitat de: a) Sortir creu i divisor de 4 i figura. b) Sortir creu i divisor de 6 o espases. c) Sortir cara o nombre senar o copes.



## PROVA

1) Marqueu mitjançant una X  $\Rightarrow$  V- Verdader o F- Fals

Qüestió	V	F
a) Tirar una moneda i observar el que surt, és un experiment determinista.		
b) Ordinador, pitjar botó power per veure que passa, experiment aleatori.		
c) Tirar un dau amb el nombre 5 a totes les cares, és experiment determinista.		
d) Tirar una moneda i veure si surt parell, és un experiment segur.		
e) Tirar una moneda i veure si surt un nombre senar, és experiment impossible.		
f) Fer l'aposta, cara guanyo, creu perds, és un experiment aleatori.		
g) Cara guanyo, creu perds, és un experiment segur per un dels dos apostant.		
h) Tirar gasolina en un incendi, és un experiment determinista.		
i) Tirar un dau per veure si surt cara o creu és un experiment segur.		
j) Tirar una moneda per veure si surt cara i creu és una experiment segur.		
k) Tirar un dau per veure si surt més petit d'1 és un experiment impossible.		
l) Tirar un dau per veure si surt senar o divisor de 2, és un esdeveniment segur.		
m) Treure parell i a la vegada divisor de 5 en un dau és un experiment impossible		
n) Treure una figura o una espasa, és un succés dependent.		
o) Treure una rei o una sota, és un experiment dependent.		
p) Treure un cavall o copes, és un succés independent.		
q) Treure una cavall o un as, és un succés independent.		
r) Tirem dos daus, la probabilitat de que sumin menys de 2, és succés impossible.		
s) Si tirem dos daus, veure que sumin menys de 14, és un esdeveniment segur.		
t) Suposem que no hi ha llum, és de nit i tenim barrejats els mitjons: tenim dues dotzenes de blaus i una dotzena de negres, només en calen tres per tenir-ne una parella del mateix color.		

2) Tirem un dau  $\Rightarrow$  a) Calculeu la Probabilitat de sortir el 5. b) Trobeu la Probabilitat de que surti divisor de 3.

3) En una baralla espanyola de 40 cartes  $\Rightarrow$  a) Probabilitat de que surti un Rei. b) La probabilitat de que surti una Figura.

4) En una urna tenim 5 boles vermelles i 10 de blanques  $\Rightarrow$  a) Probabilitat de que en fer una extracció, ens surti una bola blanca. b) Probabilitat de que surti vermella..

5) Tirem un dau, busqueu  $\Rightarrow$  a) Probabilitat de que surti múltiple de 2 i a la vegada sigui divisor de sis. b) Probabilitat de que surti parell o múltiple de 3.

6) Tirem dos daus a la vegada  $\Rightarrow$  a) Probabilitat de que sumin 8. b) Probabilitat de que sumin almenys 10 c) Probabilitat de que sumin menys de 4.

7) En una baralla espanyola de 48 cartes  $\Rightarrow$  a) Probabilitat de que surtin espases o bé ors. b) La probabilitat de que surtin copes o figures.

8) Tenim una urna amb 6 boles blanques i 9 negres  $\Rightarrow$  a) Probabilitat de treure una bola blanca i una de negre, amb reposició. b) Probabilitat de que les dues siguin negres sense reposició.

$$P(A) = CF/CP$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{Si són dependents.}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{Si són independents}$$