Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Mates 4rt ESO Socials
Tema: Funcions

abril 2018

índex

- Relació funcional
  - Concepte i taula de valors
  - Gràfica d'una funció
  - Imatge e antiimatge
  - Expressió algebraica
  - Relacions que no son funcionals

- Característiques de les funcions
  - Domini
  - Continuïtat
  - Simetria
  - Punts de tall amb els eixos de coordenades
  - Creixement i decreixement. Màxims i Mínims
  - Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Concepte de relació funcional

Concepte i taula de valors

Una funció és una relació de causa-efecte entre dues quantitats matemàtiques: a iguals causes, iguals efectes.

La causa s'anomena **variable independent** i s'indica amb la lletra ***x***. L'efecte és la **variable dependent**, que s'indica amb la lletra ***y***.

Freqüentment, en lloc de la lletra ***y*** es fa servir l'expressió ***f(x)*** (o ***g(x)***, ...) per indicar que ***y*** efectivament **depèn** del valor de ***x***.

LES REBAIXES

Si en un producte ens ofereixen un descompte del 10 %, pagarem el 90 % del preu original.

El preu rebaixat (PR) és funció del preu inicial (PI):

PR = f (PI)

PR = 0.90 · 100 = 90

Comprova aquesta taula canviant el control PI:

PI	PR
27	24.3
31	27.9
38	34.2
60	54

PI (€) 100

http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso3/3quincena9/index3_9.htm

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Gràfica d'una funció

Per obtenir la gràfica d'una funció a partir de la taula de valors, primer es dibuixen uns eixos de coordenades, representant-se els valors de la variable independent (***x***) en l'eix horitzontal (**abscisses**) i els de la variable dependent (***y***) en el vertical (**ordenades**).

Cada parella de valors de les variables dependent i independent es representa mitjançant un punt ***(x,y)*** en el sistema de coordenades.

Els punts dibuixats s'uneixen si la variable independent pot prendre qualsevol valor real en el rang estudiat: la línia (recta o corba) que resulta és la **gràfica de la funció**.

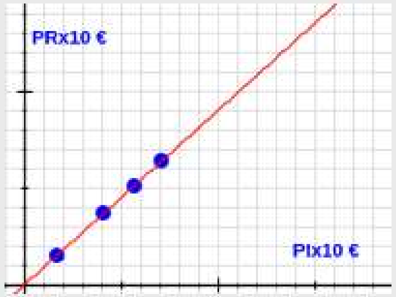
LES REBAIXES

Si en un producte ens ofereixen un descompte del 10 %, pagarem el 90 % del preu original.

El preu rebaixat (PR) és funció del preu inicial (PI):
PR = f (PI)

Dibuixa els punts d´aquesta taula i troba la gràfica de la funció:

PI	PR
17	15.3
41	36.9
57	51.3
71	63.9



http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso3/3quincena9/index3_9.htm

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Imatge i antiimatge

Si un punt ***(x,y)*** pertany a la gràfica de la funció aleshores es diu que ***y*** és la **imatge** de ***x*** i també que ***x*** és l'**antiimatge** de ***y***.

És fàcil trobar imatges i antiimatges mirant la gràfica de la relació funcional. Així es pot reproduir la taula de valors a partir de la gràfica de la funció.

Donada la funció $f(x) = -2x + 3$:

a) Calculeu la imatge de -3, 0 i 2

$f(-3) = -2\cdot(-3) + 3 = 6 + 3 = 9$
$f(0) = -2\cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$
$f(2) = -2\cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -2$

a) Calculeu l'antiimatge de -1, 3 i 5

$-1 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 + 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow f^{-1}(-1) = 2$
$3 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 - 3 \rightarrow x = 0 \rightarrow f^{-1}(3) = 0$
$5 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 - 5 \rightarrow x = -1 \rightarrow f^{-1}(5) = -1$

http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso3/3quincena9/index3_9.htm

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Expressió algebraica

Es tracta d'una fórmula que permet obtenir el valor de ***y*** quan es coneix el valor de ***x*** realizant operacions algebraiques. És, per tant, una manera d'obtenir imatges de valors de la variable independent sense necessitat de recòrrer a la gràfica de la funció.

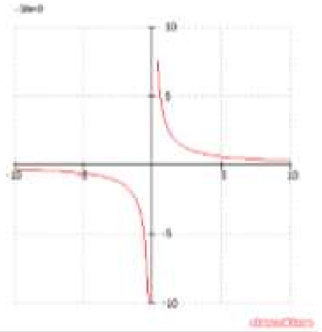
És senzill obtenir la taula de valors d'una funció a partir de la seva **expressió algebraica** o analítica: només cal donar valors a ***x*** i calcular els valors de ***y*** corresponents. Així els tres elements d'una relació funcional (taula de valors, gràfica i expressió algebraica) estan interconnectats.

Quan es coneix l'expressió algebraica d'una funció també es poden obtenir analíticament les antiimatges d'un valor de ***y*** resolent una equació.

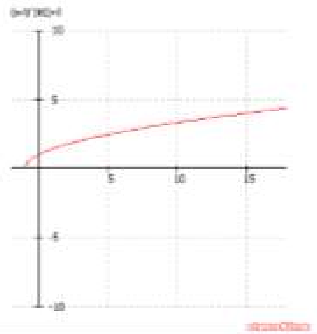
http
3qu

Assigna a cada gràfica la seva equació:

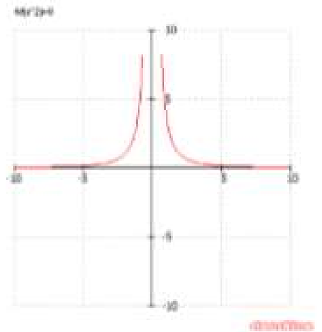
a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$



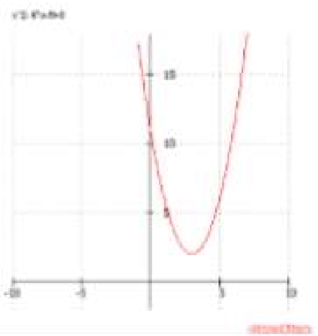
b) $f(x) = \sqrt{x+1}$



c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$



d) $f(x) = x^2 - 6x + 11$



Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Relacions que no són funcionals

En una relació funcional un valor de ***x*** només ha de tenir, com a molt, **una** imatge. No pot ser que una causa doni lloc a dues conseqüències diferents.

En canvi, una mateixa conseqüència pot ser deguda a diverses causes: un valor de ***y*** pot tenir més d'una antiimatge, o no tenir-ne cap.

Les relacions **estadístiques** són situacions en les que, tot i que no es pot predir exactament quina serà la imatge d'un valor de ***x*** (no són, per tant, relacions funcionals), sí que es pot donar una estimació d'aquest valor.

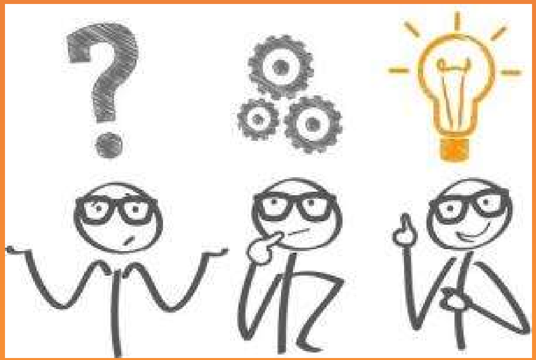
PES I ALÇADA

El **pes** d´una persona, és funció de la seva **alçada**?

http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso3/3quincena9/index3_9.htm

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Penseu una relació funcional d’un cas real, dibuixeu taula de valors, gràfica i expressió algebraica...



http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso3/3quincena9/index3_9.htm

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

FUNCIONS

Definició de funció

5.2. CONCEPTE DE FUNCIÓ

f és un a funció de $\Re$ en $\Re$ si a cada nombre real $x \in D \subseteq \Re$ li fa correspondre un altre valor real f(x):

$$f: \quad D \subseteq \Re \longrightarrow \Re$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

- El conjunt D: valors que pot prendre la variable independent x. S'anomena *domini de la funció.*
- El conjunt de valors que pot prendre la funció (variable dependent) s'anomena *recorregut*
- f(x) és únic per a cada valor $x \in D$
- Com que tant la variable x com la funció f(x) pren valors reals aquestes funcions s'anomenen *funcions reals de variables reals.*

EXEMPLES

1. $f: D \longrightarrow \Re$

$x \longrightarrow x+3$

$-1 \longrightarrow f(-1) = -1 + 3 = 2$

$0 \longrightarrow f(0) = 0 + 3 = 3$

$1 \longrightarrow f(1) = 1 + 3 = 4$

.....

2. $g: D \longrightarrow \Re$

$x \longrightarrow +\sqrt{x}$

$0 \longrightarrow f(0) = +\sqrt{0} = 0$

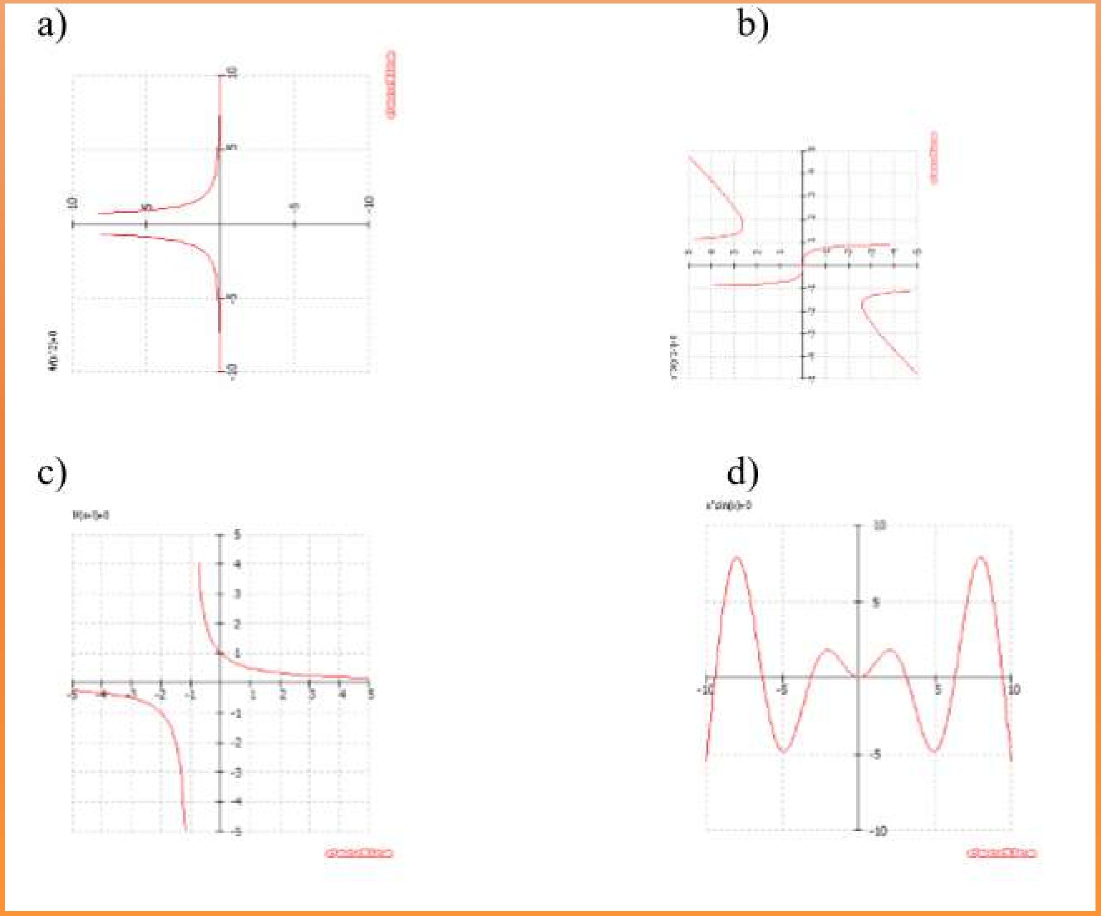
$1 \quad f(1) = +\sqrt{1} = 1$

....

$\nexists \; f(-1)$

Funcions .Imatge e antiimatge

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig



són funcions ja que a cada valor de x li correspon un únic valor de la y.

no són funcions ja que algun valor de la x li corresponen més d'un valor de la

Imatge d'una funció: és el valor que pren la funció per a un determinat valor de la variable independent (valor de la "y" coneguda la "x")

Antiimatge d'una funció: és el valor que ha de prendre la variable independent per obtenir un cert valor de la variable dependent (valor de la "x" coneguda la "y") es designa per f-1(x)

Activitats imatges- antiimatges

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

<u>EXEMPLES</u>

Donada la funció $f(x) = -2x + 3$:

a) Calculeu la imatge de -3, 0 i 2

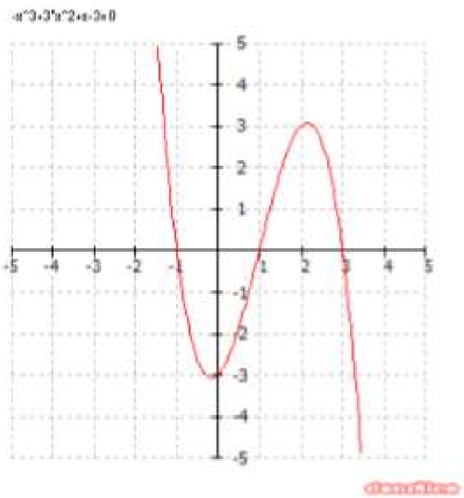
$f(-3) = -2\cdot(-3) + 3 = 6 + 3 = 9$
$f(0) = -2\cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$
$f(2) = -2\cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -2$

a) Calculeu l'antiimatge de -1, 3 i 5

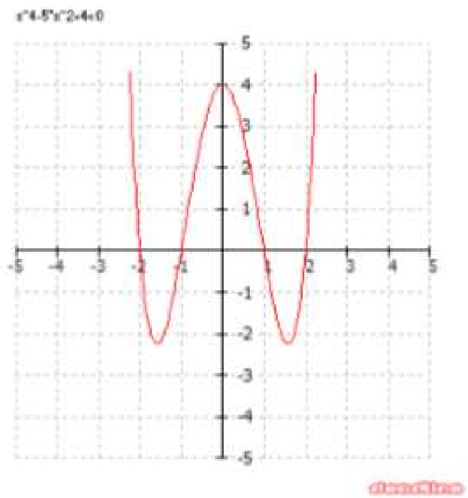
$-1 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 + 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow f^{-1}(-1) = 2$
$3 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 - 3 \rightarrow x = 0 \rightarrow f^{-1}(3) = 0$
$5 = -2\cdot x + 3 \rightarrow 2x = 3 - 5 \rightarrow x = -1 \rightarrow f^{-1}(5) = -1$

2. Donades les funcions següents trobeu l' imatge de 0, i 2 en cada cas, i l'antiimatge de –3, 0.

a)



b)



3. Donada la funció $f(x) = 2x - 3$
   a) imatge de 3 i de -1 es a dir, $f(3)$ i $f(-1)$
   b) antiimatge d' 1, es a dir, $f^{-1}(1)$

4. Donades les funcions $f(x) = x - 3$ i $g(x) = 2x^2$
   a) imatge de 3, -2, 5, i 0 per totes dues funcions
   b) antiimatge de 0, -4, 2, i 8

Institut Can Puig, Sant Pere de Ribes

Domini i recorregut

5.3.1. Domini de definició d'una funció. Recorregut

S'anomena *domini de definició d'una funció* f, i es designa per D(f) o simplement D, al conjunt de valors x per als quals existeix la funció, es a dir, per als quals hi ha f(x).

Raons per els quals el domini de definició pot restringir-se:

a) Context real del qual s'ha extret la funció

Si es parla d'àrea mai la funció mai podrà prendre valors negatius

Si es tracta de l'edat de persones el domini quedarà restringit ([0, 110]

b) Per voluntat de qui ha proposat la funció

c) Impossibilitat de realitzar algunes operacions amb alguns valor de x

- Denominadors que s'anul·len
- Arrels d'index parell de nombres negatius
- Logaritmes de nombres negatius ....

- Si y = polinomi o exponencial $\rightarrow$ $D(y) = \Re$
- Si $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\rightarrow$ $D(y) = \Re - \{x \in \Re / g(x) = 0\}$
- Si $y = \sqrt[n]{f(x)}$, n parell $\rightarrow$ $D(y) = \{x \in \Re / g(x) \geq 0\}$
- Si y = logf(x) $\rightarrow$ $D(y) = \{x \in \Re / g(x) > 0\}$

Exemples de Dominis

EXEMPLES

Quin es el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{1}{x+3} \rightarrow$ D(y) = $\Re - \{-3\}$, ja que el denominador s'anul·la en x = -3

b) $y = \sqrt{x-2} \rightarrow$ $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow$ D(y) = $[2, +\infty]$

c) Volum del cub: $v = l^3 \rightarrow v \geq 0 \rightarrow l \geq 0 \rightarrow$ D(v) = $[0, +\infty]$

d) $y = 2x + 5 \quad x \in [1, 4] \rightarrow$ D(y) = $[1, 4]$, per voluntat de que posa l'enunciat.

El conjunt de valors que pot prendre la funció (variable dependent) s'anomena *recorregut*, i es designa per R(f)

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

un altre manera d’entendre Domini i Recorregut

1. Funcions reals

Domini i recorregut

Donada una funció **f:x → y**

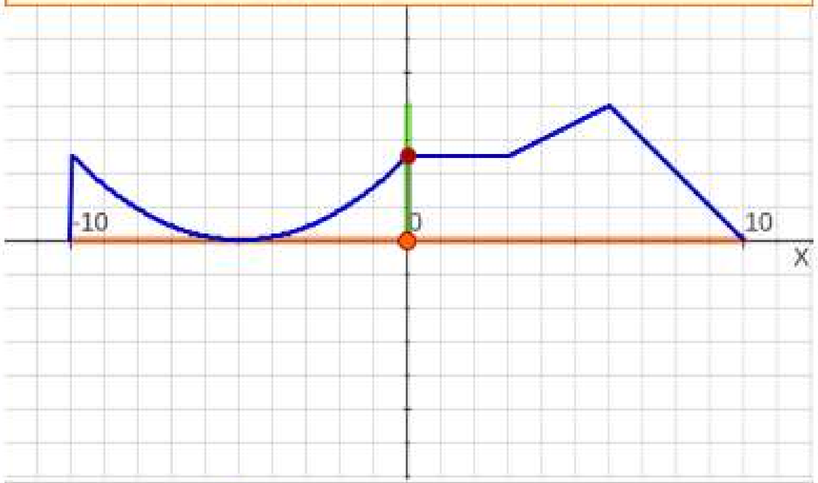
- S'anomena **domini** de **f** el conjunt de valors que pren la variable independent, **x**. S'indica com a **Dom f**.
  El domini està format, per tant, pels valors de **x** per als quals existeix la funció, és a dir, per als quals hi ha un **f(x)**.

- El **recorregut** és el conjunt de valors que pot prendre la variable dependent, **y**, això és el conjunt de les imatges. Es representa com a **Im f**.

Feu clic per calcular el domini d'algunes funcions

En vista de la gràfica s'observa que el **domini** de la funció està format per l'interval **[-10,10]**. Fora d'aquest la funció no està definida.
En variar x veiem que els valors que pren f(x) van des de **0** a **4**, per tant, el **recorregut** és l'interval **[0,4]**

Pitgeu per veure com es calculen dominis.



Canvieu el valor de x 0 → f(0) = 2.5

Activitats de Domini i Recorregut

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

6. Calcula el domini de les següents funcions:

$a) y = 3x - 2$

$b) \cancel{f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 128}}$

$c) g(x) = \dfrac{2x+5}{4}$

$d) y = \sqrt{x-2}$

$e) f(x) = \dfrac{3}{x-5}$

$f) \cancel{g(x) = \sqrt[8]{3-5x}}$

$g) y = \dfrac{5x-2}{x^2 - 3x}$

$h) \cancel{f(x) = \dfrac{7x-2}{x^3+8}}$

$i) \cancel{g(x) = \dfrac{9-4x}{x^4 - 3x^2 - 4}}$

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Continuïtat i discontinuïtats

Continuïtat i discontinuïtats

La primera idea de funció **contínua** és la que es pot representar d'un sol traç, sense aixecar el llapis del paper.

Una funció y=f(x) es diu que és contínua en **x=a** si
- La funció està definida en *x=a*, existeix **f(a)=b**.
- Les imatges dels valors pròxims a **a** tendeixen a **b**.

Quan una funció no és contínua es diu que en presenta alguna **discontinuïtat**. Hi ha diverses raons per les quals una funció no és contínua en un punt:

Hi ha un "forat" en la gràfica, o bé perquè la funció no està definida en el punt, o bé perquè el seu valor queda separat de la resta.

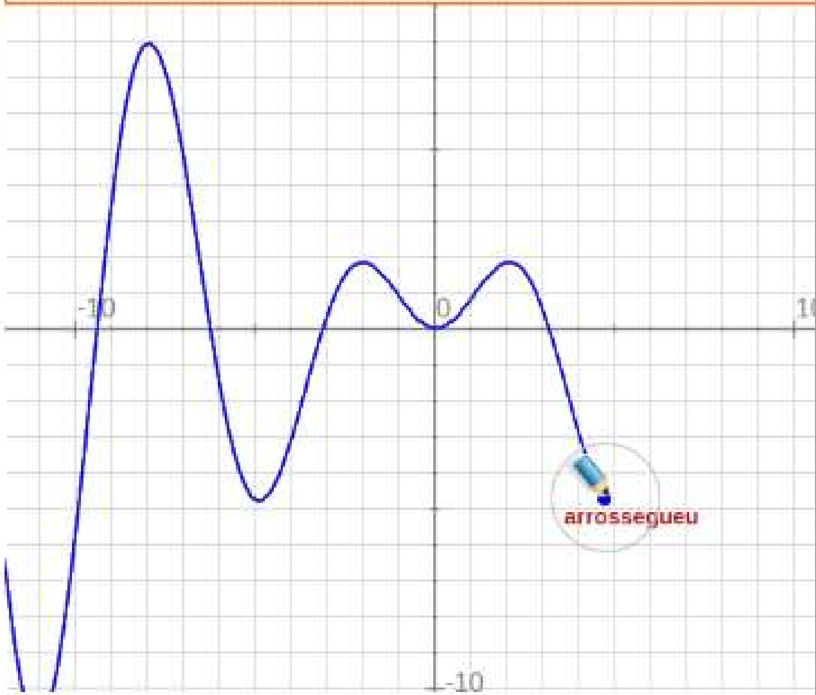
Presenta un salt.

El valor de la funció creix (o decreix) indefinidament quan ens apropem al punt.

Feu clic per fer un exercici

La funció de la gràfica és **contínua.**
Pot dibuixar-se amb un sol traç.

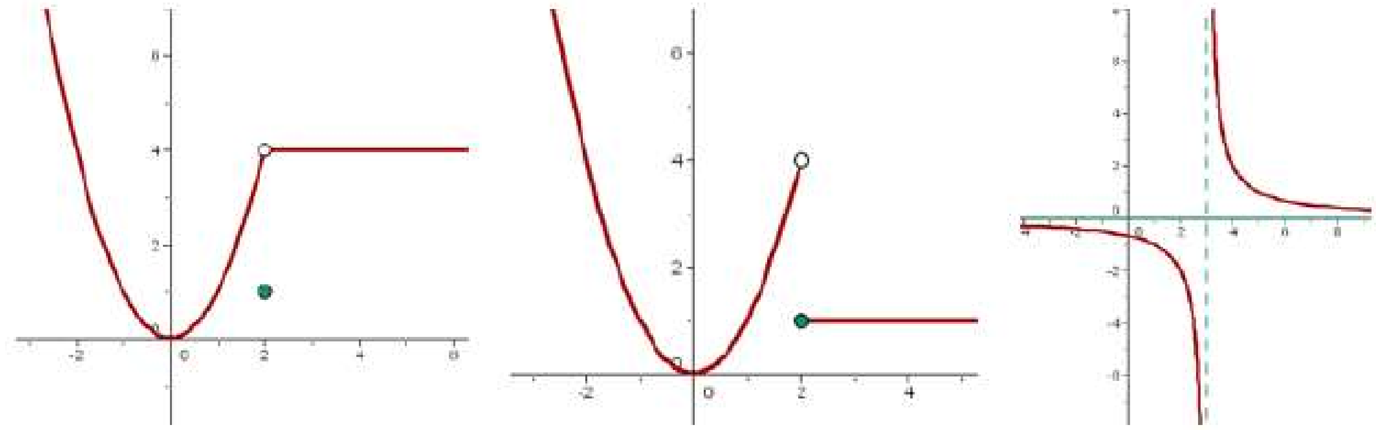
dibuix



http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso4B/funciones1/quincena8_contenidos_2a.htm

Continuïtat i discontinuïtats

10. Estudia la continuïtat de les següents funcions. Indica i classifica els punts de discontinuïtat.



http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso4B/funciones1/quincena8_contenidos_2a.htm

Tall amb els eixos coordenades

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

5.3.4. Punts de tall amb els eixos de coordenades

- Si un punt talla a l'eix d'abscisses → $y = 0$, $P(x,0)$
- Si un punt talla a l'eix d'ordenades → $x = 0$, $P(0,y)$

8. Determina els punts de tall amb els eixos de coordenades de les següents funcions:

a) $y = 3x + 2$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $g(x) = x^2 + 9$

d) $y = (2x - 6)(x + 1)$

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$

f) $g(x) = \dfrac{4x-8}{x}$

g) $y = x^5 - 5x^4 + 6x^3$

Simetries

2. Propietats de les funcions

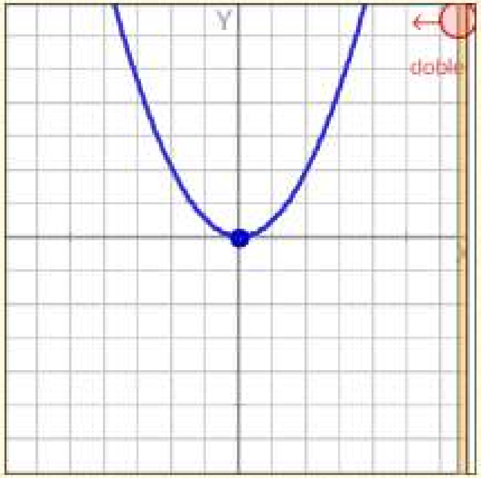
Simetries

La gràfica d'algunes funcions pot presentar algun tipus de simetria que si s'estudia prèviament, en facilita el dibuix.

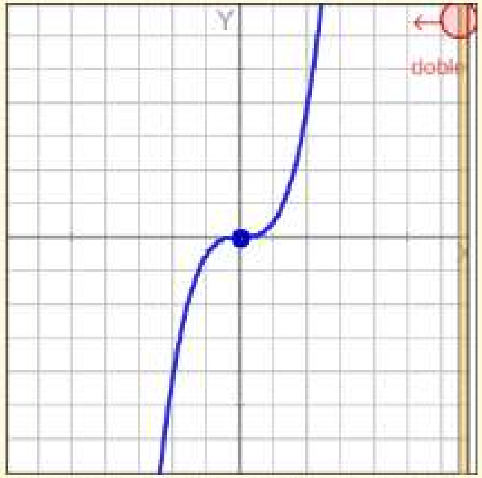
- Una funció és **simètrica** respecte a l'**eix OY**, si **f(-x)=f(x)**.
  En aquest cas la funció es diu **PARELLA**.

- Una funció és **simètrica** respecte a l'**origen de coordenades** quan **f(−x)=−f(x)**.
  En aquest cas la funció s'anomena **SENAR**.

Feu clic per dibuixar algunes funcions simètriques.



Una funció és simètrica respecte a l'eix OY, si en doblegueu per aquest eix les dues parts coincideixen.



Una funció és simètrica respecte a l'origen, si en doblegueu per ambdós eixos les dues parts coincideixen.

Es compleix: $f(-x) = f(x)$

En aquest cas $f(-x) = - f(x)$

Comproveu-lo doblegant i canviant el valor de x

0

Comproveu-ho també en aquest cas

0

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

Creixement i decreixement

Creixement i decreixement

Una característica de les funcions que es pot visualitzar fàcilment en les gràfiques és la monotonia. Quan en augmentar el valor de x augmenta el valor de *y=f(x)*, la gràfica "ascendeix" i es diu que la funció és **creixent**. Si al contrari en augmentar **x** disminueix y, la gràfica "descendeix", i la funció **decreix**.

Una **funció** és **creixent** en un interval, quan donats dos punts qualssevol d'aquest

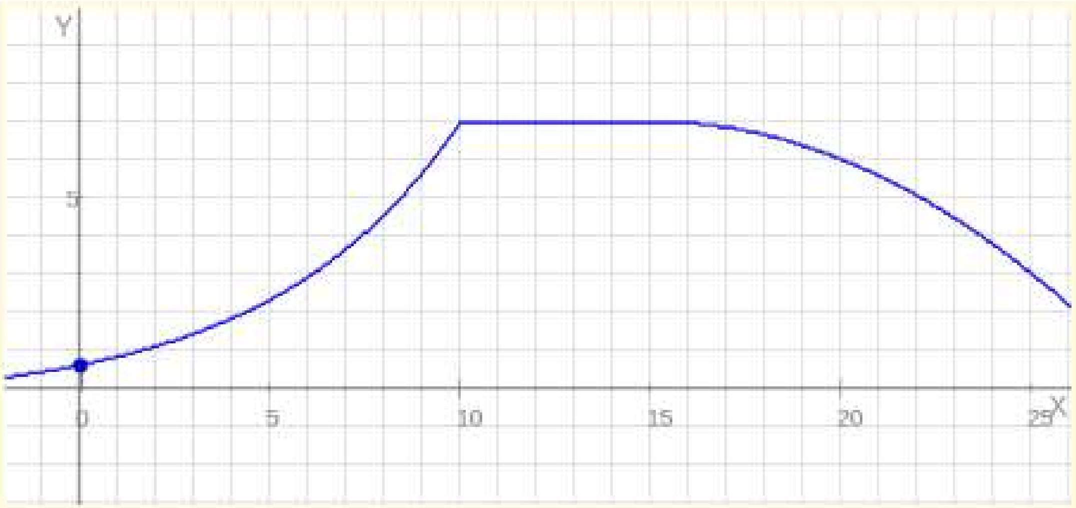
- Si $x_1<x_2$, llavors $f(x_1)<f(x_2)$

I serà **decreixent**

- Si $x_1<x_2$, llavors $f(x_1)>f(x_2)$

Diferents tipus de creixement

Feu clic per fer un exercici



x = 0 f(x)= 0.61

Observeu la gràfica de la funció de la figura, en variar **x** fins a valer **10** **f(x)** augmenta tal com augmenta **x** ; després es manté constant fins a x= **15** i a partir d'allà disminueix mentre **x** augmenta.

La funció és **creixent** si x<10 i **decreixent** si x>15.

En l'interval [10,15] no és creixent ni decreixent.

Sant Pere de Ribes
Institut Can Puig

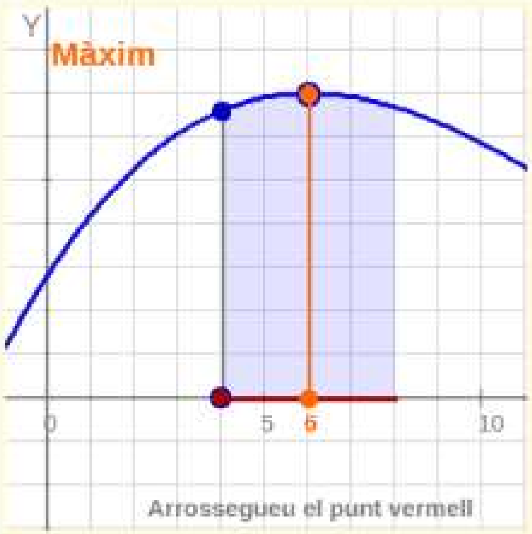
Màxims i mínims

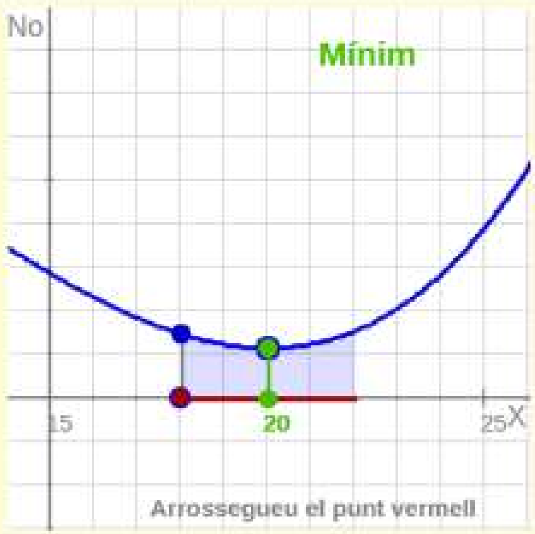
Màxims i mínims

Donada una funció contínua en un punt x=a, es diu que presenta un **màxim relatiu**, si a l'esquerra del punt esmentat la funció és creixent i a la dreta la funció és decreixent.
Si, al contrari, la funció és creixent a la dreta i decreixent a l'esquerre hi ha un **mínim relatiu**.

Si es verifica que f(a)>f(x) per a qualsevol valor *x* del domini, i no només per als valors "del voltant", es parla de **màxim absolut** en *x=a*.
I anàlogament es diu que a *a* hi ha un **mínim absolut** si f(a)<(f(x) per a qualsevol *x* del domini.

Feu clic per fer un exercici





f(4)= 6.61 < 7 =f(6)

f(18)= 1.46 > 1.14 =f(20)

Comproveu que hi ha un **entorn** de **6** , en el qual **f(6)>f(x)**

A **x=6** hi ha un **màxim relatiu**

Comproveu que hi ha un **entorn** de **20** , en el qual **f(20)<f(x)**

A **x=20** hi ha un **mínim relatiu**

Concavitat , convexitat i punts inflexió

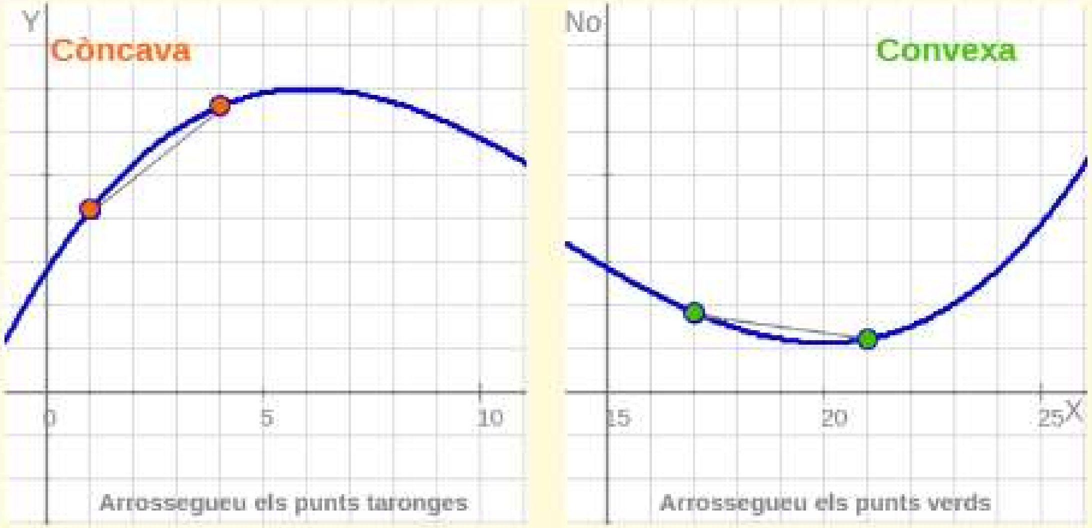
Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Una altra característica d'interès en les gràfiques de les funcions és la concavitat, estudiar els intervals en què la gràfica es corba cap a baix o cap a dalt.

- Una funció és **còncava** en un interval si el segment que uneix dos punts qualssevol de la corba queda sota d'aquesta, i **convexa** si hi queda per sobre.

Els punts del domini en els quals la funció passa de còncava a convexa o viceversa, s'anomenen **punts d'inflexió**.

Feu clic per fer un test amb preguntes del tema



Observeu que la corda o segment que uneix dos punts de la gràfica queda per sota d'aquesta.

Observeu que la corda que uneix dos punts de la gràfica queda aquí per sobre d'aquesta.

La funció presenta en aquest interval la concavitat cap **avall**

És còncava

La funció presenta en aquest interval la concavitat cap **amunt**

És convexa