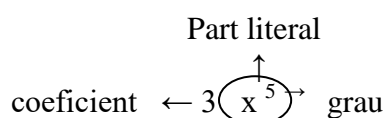


TEMA 3: Polinomis

3.1 DEFINICIONS:

- Anomenarem **monomi** qualsevol expressió algèbrica formada per la multiplicació d'un nombre real i d'una variable elevada a un exponent natural.
- El nombre es diu **coeficient** i la variable elevada a l'exponent natural es diu **part literal**.
- Anomenarem **grau** del monomi a l'exponent de la variable

EXEMPLE



- Anomenarem **binomi** a la suma de dos monomis de diferent grau
- Anomenarem **trinomi** a la suma de tres monomis de diferent grau
- Anomenarem **polinomi** a l'expressió que resulti de sumar monomis de diferents graus

EXEMPLE

- $2x^2 - 5x^4$ és un binomi de grau 4
- $3t^5 - 2t^2 + 4$ és un trinomi de grau 5
- $8z - 2z^3 + 3z^2 - 10$ és un polinomi de grau 3

En general un polinomi és una expressió algèbrica que resulta de sumar monomis de diferents graus.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

El **grau** és n i el **terme independent** és a_0

3.2 VALOR NUMÈRIC D'UN POLINOMI:

Donat un polinomi $P(x)$, si substituïm la variable x per un nombre i en calculem el resultat, obtindrem un altre nombre que anomenarem **valor numèric del polinomi**.

EXEMPLE

Donat el polinomi $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, Calcula el valor numèric del polinomi en:

- $x = -2 \rightarrow P(-2) = 2(-2)^3 - 4(-2)^2 + 5(-2) - 2 = -16 - 16 - 10 - 2 = -44$
- $x = 0 \rightarrow P(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 2 = -2$
- $x = 2 \rightarrow P(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2 = 16 - 16 + 10 - 2 = 8$

3.3 BINOMI DE NEWTON

Es tracta de deduir una formula que ens permeti elevar a qualsevol potència d'exponent natural n , un binomi, es a dir com calcular $(a + b)^n$

Si desenvolupem les potències de $(a+b)$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

observem que els coeficients surten de la seqüència

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

Aquest és el triangle de Tartaglia. Cadascun d'aquests nombres correspon al valor d'un nombre combinatori

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ex:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Per escriure la potència d'un binomi utilitzem el Binomi de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^h$$

3.4 OPERACIONS AMB POLINOMIS:

3.4.1 Suma i resta de polinomis:

Per sumar (restar) dos polinomis ho podem fer de dues maneres:

- Posem un polinomi a sota l'altre (deixant un buit quan no tingui el monomi corresponent) i sumem (restem) els monomis amb el mateix grau.
- Aparellem els monomis que tinguin el mateix grau de després sumem (restem).

EXEMPLE

1. Suma els polinomis $P(x) = 10x^4 - 7x^3 - 8x + 5$ i $Q(x) = -12x^4 + 3x^2 + 7x - 12$

$$\begin{array}{r} \text{a) } 10x^4 - 7x^3 \qquad \qquad - 8x + 5 \\ -12x^4 \qquad \qquad + 3x^2 + 7x - 12 \\ \hline -2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } (10x^4 - 7x^3 - 8x + 5) + (-12x^4 + 3x^2 + 7x - 12) = \\ 10x^4 - 12x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 8x + 7x + 5 - 12 = -2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 8 \end{array}$$

2. Calcula $P(x) - Q(x)$ els polinomis del exemple anterior:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 10x^4 - 7x^3 \qquad \qquad - 8x + 5 \\ - (-12x^4 \qquad \qquad + 3x^2 + 7x - 12) \\ \hline 22x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 15x + 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } (10x^4 - 7x^3 - 8x + 5) - (-12x^4 + 3x^2 + 7x - 12) = \\ 10x^4 + 12x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 8x - 7x + 5 + 12 = 22x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 15x + 17 \end{array}$$

3.4.2 Producte de polinomis:

Per multiplicar polinomis ho podem fer de dues maneres:

- Escriu els polinomis, l'un sota a l'altre fent coincidir els monomis del mateix grau
Multiplicar el monomi de grau més petit del polinomi de sota per cadascun dels monomis de l'altre polinomi. El resultat es posa a sota, fent coincidir els monomis del mateix grau.
Repeteix el procés anterior amb la resta de monomis del polinomi de sota.
Finalment, suma els polinomis que has obtingut.

- b) Multiplicar cada terme del primer polinomi per tots els termes del segon polinomi, i després sumar-ho tot.

EXEMPLE

Multiplica els polinomis $P(x) = 10x^4 - 7x^3 - 8x + 5$ i $Q(x) = 3x + 2$

$$\begin{array}{r}
 a) \quad \begin{array}{r}
 10x^4 - 7x^3 - 8x + 5 \\
 \hline
 + 3x + 2 \\
 \hline
 20x^4 - 14x^3 - 16x + 10 \\
 30x^5 - 21x^4 - 24x^2 + 15x \\
 \hline
 30x^5 - x^4 - 14x^3 - 24x^2 - x + 10
 \end{array}
 \end{array}$$

b) $(3x + 2) \cdot (10x^4 - 7x^3 - 8x + 5) =$
 $3x \cdot (10x^4 - 7x^3 - 8x + 5) + 2 \cdot (10x^4 - 7x^3 - 8x + 5) =$
 $30x^5 - 21x^4 - 24x^2 + 15x + 20x^4 - 14x^3 - 16x + 10 = 30x^5 - x^4 - 14x^3 - 24x^2 - x + 10$

3.4.3 Divisió de polinomis. Regla de Ruffini:

Per dividir dos polinomis qualssevol procedim de la següent forma:

EXEMPLE

Divideix el polinomi $A(x) = 3x^5 + 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ pel polinomi $B(x) = x^3 - x + 2$

$$\begin{array}{r}
 3x^5 + 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \quad \Big| \quad \frac{x^3 - x + 2}{3x^2 + 6x - 2} \\
 - 3x^5 + 3x^3 - 6x^2 \\
 \hline
 + 6x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x - 4 \\
 - 6x^4 + 6x^2 - 12x \\
 \hline
 - 2x^3 - 2x^2 - 10x - 4 \\
 + 2x^3 - 2x + 4 \\
 \hline
 - 2x^2 - 12x
 \end{array}$$

- Dividir dos polinomis, A(x) (dividend) dividit per B(x) (divisor), és trobar dos polinomis Q(x) (quocient) i R(x) (residu) tals que:

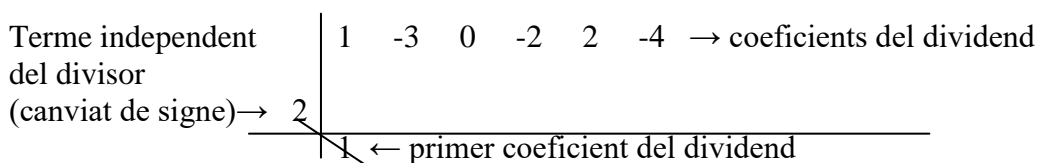
$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \text{ on } 0 \leq \text{grau de } R(x) < \text{grau de } B(x)$$

Divisió per $x - a$. Regla de Ruffini:

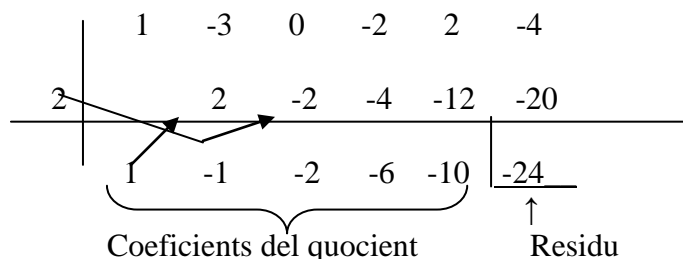
La regla de Ruffini ens permet trobar el quocient i el residu de la divisió de polinomis en què el divisor es un polinomi de la forma $x - a$ o $x + a$

EXEMPLE

Si volem dividir el polinomi $A(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 2x - 4$ per $B(x) = x - 2$. El procediment ha seguir és el següent:



Es tracta de multiplicar el 2 per el primer coeficient del dividend i posar el resultat sota el següent coeficient del dividend i sumar (restar).



Així doncs: Quocient $Q(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 6x - 10$ i el residu $R(x) = -24$

3.5 TEOREMA DEL RESIDU:

EXERCICI

Donat el polinomi $A(x) = x^3 - 2x + 3$

1. Aplicant la regla de Ruffini calcula el residu de les següents divisions:

- $A(x) : (x - 2)$
- $A(x) : (x + 3)$

2. Calcula el valor numèric del polinomi $A(x)$ per a:

- $x = 2$
- $x = -3$

3. Que podem deduir dels dos apartats anteriors?

Solució :

1. a)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}$$

↑
Residu

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ & & -3 & 9 & -21 \\ \hline & 1 & -3 & 7 & -18 \end{array}$$

↑
Residu

2 a) $A(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 8 - 4 + 3 = 7$

b) $A(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 3 = -27 + 6 + 3 = -18$

3. El residu coincideix amb el valor numèric

3.5.1 Teorema del residu:

El residu de la divisió del polinomi $P(x)$ per a $(x - a)$ és el valor numèric del polinomi $P(x)$ per a $x = a$.

3.5.2 Arrels d'un polinomi:

- Quan el valor numèric d'un polinomi $P(x)$ per $x = a$ és igual a zero ($P(a) = 0$), diem que a és una **arrel** (o un **zero**) del polinomi $P(x)$.
- el que és el mateix se la divisió de $P(x)$ per $(x - a)$ es exacta (el residu és 0) diem que $x = a$ és arrel del polinomi $P(x)$.

3.5.3 Càlcul d'arrels d'un polinomi:

Calcular les arrels d'un polinomi, és trobar els valors de la variable que fan que el valor numèric sigui zero, es tracta per tant de resoldre l'equació $P(x) = 0$:

- Si el polinomi és de grau menor que 3, resollem l'equació plantejada.

EXEMPLE

Troba les arrels del polinomi $P(x) = x^2 - 2x - 8$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Les arrels del polinomi són 4 i -2

- Si el polinomi és de grau igual o major que tres utilitzem la regla de Ruffini:

EXEMPLE

Troba les arrels del polinomi $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$$

Provem un valor que sigui divisor del terme independent en aquest cas $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -3 & -8 & -4 \\
 -1 & & -1 & -1 & 4 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -4 & -4 & \underline{0} \\
 -1 & & -1 & 0 & 4 & \\
 \hline
 & 1 & 0 & -4 & \underline{0} & \\
 2 & & 2 & 4 & & \\
 \hline
 & 1 & 2 & \underline{0} & & \\
 -2 & & -2 & & & \\
 \hline
 & 1 & \underline{0} & & &
 \end{array}$$

Repetim el procés amb el mateix valor i si no ho compleix provem amb un altre divisor del nou terme independent

Les arrels d'aquest Polinomi són -1, 2 i -2

OBSERVACIONS:

En el cas de polinomis sense terme independent, caldrà primer treure factor comú, i posteriorment aplicar la regla de Ruffini:

Exemple:

$$P(x) = x^4 - x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) \begin{cases} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow x^3 - 1 = 0 \rightarrow \text{Regla de Ruffini} \rightarrow x = 1 \\ \text{o resolució d'equació} \end{cases}$$

Les arrels de $P(x)$ són 0 i 1