

TEMA 2 : Sistemes d'equacions lineals

Activitats

1. Classifiqueu els següents sistemes d'equacions segons el nombre de solucions que tenen:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{array} \right\} & \text{b)} & \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1 \end{array} \right\} & \text{c)} & \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

2. Resoleu els sistemes pel mètode de Gauss i classifiqueu-los segons el nombre de solucions:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 3x + z = 0 \end{array} \right\} & \text{b)} & \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 3x + z = 1 \end{array} \right\} \\ \text{b)} & \left. \begin{array}{l} -2x + y - z = 1 \\ 2x - 2y - z = 3 \\ -y - 2z = 7 \end{array} \right\} & \text{d)} & \left. \begin{array}{l} -x + y + z - 2t = -5 \\ 2x - y - t = 0 \\ x + z - 3t = -2 \\ -x + y - 2z + t = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

3. Resoleu el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right\}$$

Canvieu només un signe i transformeu el sistema, si és possible, en compatible indeterminat.

4. Escriviu mitjançant equacions aquest sistema i solucioneu-lo amb el mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Trobeu els valors de x , y , i z que verifiquen l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Considereu les matrius A, B, C, D i E

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x & m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

- a) Si $(A \cdot B)(2C - D) = E$, plantegeu un sistema de dues equacions amb dues incògnites en funció de m .
- b) Per a quins valors de m el sistema té solució?. Quan és única?. Resoleu el sistema si $m=4$.

7. Calculeu el rang de les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Sabem que el rang de la matriu és 2, determineu el valor de a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 11 & -4 & a \end{pmatrix}$$

9. Trobeu el valor de K, si existeix, perquè el rang de la matriu A sigui 1

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 5 & k & 10 \\ 1 & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

10. Discussiu els sistemes pel Teorema de Rouché-Frobenius i trobeu, si és possible, la solució.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = -2 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = -2 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ -x - z = 7 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y - z + t = 1 \\ x - 3y + z - t = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ y - 2z = 4 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} 3x - 3y + z = 1 \\ x + 4y + 4z = 2 \\ 5x - 10y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

11. Un inversor va comprar accions de les empreses A, B i C, i inverteix a C el doble que a A. Passat un any, l'empresa A li va pagar el 6% de benefici, B el 8% i C el 10%. Si el benefici total de l'empresa va ser de 1720€, pot ser que el valor inicial de les accions fos de 20000€?
12. Una persona va a la bodega i compra tres classes de vi, A, B i C. En total, compra 20 ampolles i gasta 100 €. L'ampolla de A val 3€, la de B 7 € i la de C 10€. Trobeu el nombre d'ampolles de cada classe que ha comprat si sabeu que, almenys, n'ha comprat una de cada.
13. La Raquel, la Paula i la Maria surten a comprar i cadascuna compra una samarreta. El preu mitjà de les peces és de 14€. La diferència entre el preu de la samarreta de la Maria i la de la Paula és el doble de la diferència entre el preu de la samarreta de la Paula i la de la Raquel. Si la samarreta de la Paula li hagués costat el quàdruple, sobrepassaria en 42€ el preu de la de la Raquel. És possible saber el preu de les samarretes?
14. Als astronautes de la nau Enterprise se'ls prepara dosis amb dos tipus de complements. Cada gram del complement A conté 2 unitats de riboflavina, 3 de ferro i 2 de glúcids. Cada gram del complement B conté 2 unitats de riboflavina, 1 de ferro i 4 de glúcids. Quants grams de cada complement són necessaris per produir exactament una dosi amb 12 unitats de riboflavina, 16 de ferro i 4 de glúcids?
15. Tres treballadors, A, B i C, a final d'un mes, presenten a l'empresa una plantilla de seguiment, corresponent a les hores de feina, dietes i quilòmetres de desplaçament que han fet cadascun d'ells.

	Hores de feina	Dietes	Quilometratge
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Si sabeu que l'empresa paga el mateix a cada treballador: x euros per hora treballada, y euros per cada dieta i z euros per quilòmetre i que aquest mes ha pagat un total de 924 € al treballador A, 1390 € al B i 646 € al C, calculeu x , y i z .

16. Una empresa ha invertit 73000 € en la compra d'ordinadors portàtils de tres classes A, B i C, els costos per unitat dels quals són 2400 €, 1200 € i 1000 €, respectivament. Si sabeu que en total s'han comprat 55 ordinadors i que la quantitat invertida en els de tipus A ha estat la mateixa que la invertida en els de tipus B, quants aparells ha comprat de cada classe?
17. En una càmera digital, cada fotografia de qualitat normal ocupa 0,2 megabytes de memòria i cada fotografia de qualitat òptima ocupa una quantitat A desconeguda de megabytes. Aquesta setmana hem portat a imprimir 24 fotografies, que han ocupat un total de 9,2 megabytes de memòria.

- a) Plantegeu un sistema d'equacions en funció de A en què les incògnites siguin el nombre de fotos de cada classe que s'han fet. Estudieu la compatibilitat del sistema.
- b) Hi ha alguna quantitat de megabytes que és impossible que ocupi una fotografia de qualitat òptima?
- c) La setmana passada també es van fer 24 còpies, que van ocupar 9,2 megabytes de memòria. És possible que el nombre de fotos de cada tipus fos diferent al d'aquesta setmana?