

## TEMA 3 : Programació lineal

### Activitats

1. Representeu la regió factible donada pel sistema d'inequacions:

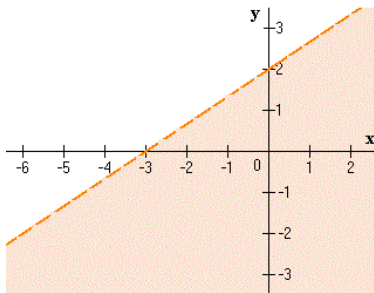
$$\text{a) } \begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq -1 \\ x + y \geq -1 \\ x - 3y \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

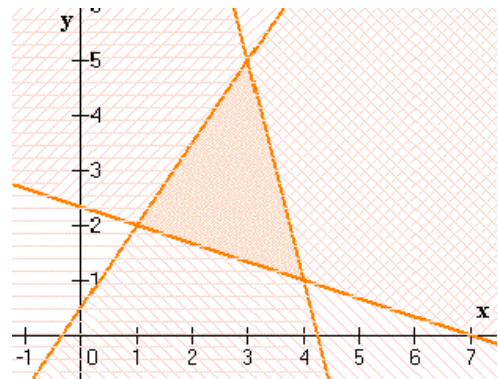
$$\text{c) } \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ y + 2x \leq 4 \end{cases}$$

2. Determineu un sistema d'inequacions per a cada regió representada

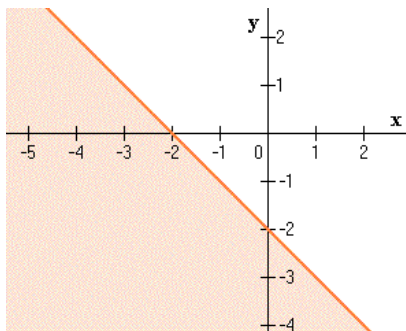
a)



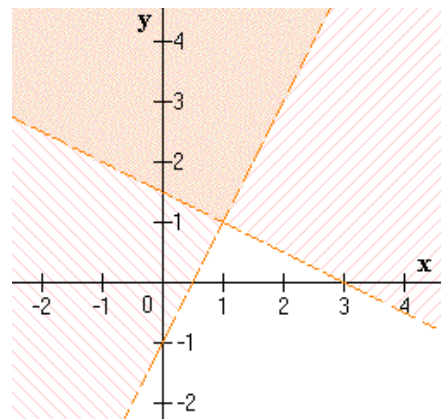
c)



b)



d)



3. (PAU 2007) Considereu els sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 5x + y \leq 13 \end{array} \right\}$$

- Representeu gràficament la regió factible
- Calculeu el màxim de la funció  $f(x, y) = x - 3y$  en aquesta regió

4. (PAU 2005) Considereu els sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y - 4 \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \end{array} \right\}$$

- Calculeu en quins punts de la regió factible determinada pel sistema anterior la funció  $f(x, y) = \frac{4x}{3} + y$  pren els seus valors màxim i mínim
- Quins són aquest valors

5. (PAU 2004) Considereu els sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x + y \geq 2 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

- Representeu gràficament la regió solució
- Calculeu el mínim de la funció  $f(x, y) = x - 2y$  en la regió solució. En quins punts de la regió s'assoleix aquest mínim?

6. (PAU 2003) Dibuixeu la regió del pla determinada pel sistema d'inequacions següents i calculeu el màxim de la funció  $f(x, y) = 2x + 2y$  en aquesta regió

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ -x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

7. (PAU 2000) Dibuixeu la regió del pla determinada pel sistema d'inequacions següents i calculeu el màxim de la funció  $z = x + y$  en aquesta regió

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 2 \\ 4x + y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

8. (PAU 1999) Representeu gràficament la regió factible determinada per les desigualtats següents i calculeu la solució que fa mínima la funció  $z = x + 2y$  sotmesa a aquestes restriccions:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 5 \\ 4x + 3y \leq 30 \end{array} \right\}$$

9. (PAU 2004) Decidiu si el polígon de vèrtex consecutius A(0,0); B(5,2); C(7,1); D(7,6) i E(0,6) pot ser la regió factible d'un problema de programació lineal. Justifiqueu la resposta.

10. (PAU 1998) Dibuixeu la regió factible del pla determinada per les desigualtats següents i calculeu el valor màxim de la funció  $z = 2x + y$  en aquesta regió:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 6 \\ x - y \geq 0 \\ y \geq 1 \end{array} \right\}$$

11. (PAU 1998) Dibuixeu la regió factible del pla determinada per les desigualtats següents i calculeu el valor màxim de la funció  $z = x + y$  en aquesta regió:

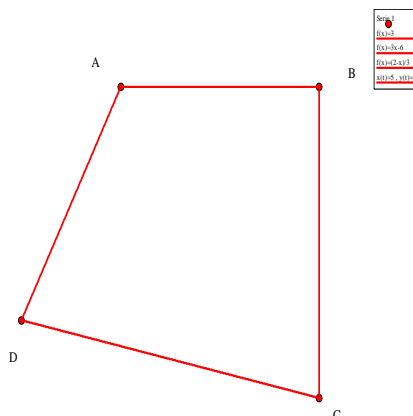
$$\left. \begin{array}{l} 6x - y \geq 5 \\ 4x + y \leq 10 \\ y \geq x \end{array} \right\}$$

12. (PAU 2006) La funció objectiu d'un problema de programació lineal és  $f(x, y) = ax - by + c$ , amb  $a, b$  i  $c$  nombres positius. Esbrineu en quin dels punts A o B del gràfic la funció objectiu pren un valor més gran. Raoneu la resposta.

$f(x) = 2x + 2$
$f(x) = -2x + 30$
$f(x) = -x + 10$
$f(x) = 0.5x + 4$
Signo

A      B

13. (PAU 2004) El quadrilàter ABCD és la regió solució d'un sistema d'inequacions lineals (els costats del quadrilàter també formen part de la regió solució),



- Trobeu el valor màxim i el mínim de la funció  $f(x,y) = x + 3y$  en aquesta regió
- En quins punts de la regió solució la funció anterior assoleix el màxim? I el mínim?.

14. (PAU 2004) Trobeu els punts de la regió del dibuix on la funció  $f(x,y) = 2x + 4y + 5$  pren el valor màxim i digueu en quin és aquest valor màxim

$f(x,y) = 2x + 4y + 5$
$f(x,y) = 2x + 4y + 5$
$f(x,y) = 2x + 4y + 5$
$f(x,y) = 2x + 4y + 5$
$f(x,y) = 2x + 4y + 5$

15. (PAU 2007) En un taller fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten  $0.9 \text{ m}^2$  de cuir i 8 hores de feina. Per fer-ne una del segon model es necessiten  $1.2 \text{ m}^2$  de cuir i 4 hores de feina. Per elaborar tots dos tipus de bosses, el taller disposa de  $60 \text{ m}^2$  de cuir i pot dedicar-hi un màxim de 400 hores de feina.

- Expresseu mitjançant un sistema d'inequacions, les restriccions a què està sotmesa la producció d'aquests dos tipus de bosses.
- Representa la regió solució d'aquest sistema i trobeu-ne els vèrtex

16. **(PAU 2007)** Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per a criatures. Per fer una jaqueta es necessiten 1 m de roba i 2 botons, i per fer uns pantalons, 2 m de roba 1 boto i una cremallera. El taller disposa de 500 m de roba, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que s'obté per la venda d'una jaqueta és de 20€ i per la venda d'uns pantalons és de 30€. Suposem que es ven tot el que se fabrica.
- Calculeu el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per tal d'obtenir un benefici màxim. Determineu també aquest benefici.
  - Si el material sobrer es ven a 1€ el metre de roba, 0.20€ cada cremallera i 0.01€ cada botó, calculeu quant es pot obtenir per la venda del que ha sobrat
17. **(PAU 2006)** En un jardí municipal es vol plantar un mínim de 1200 geranis, 3200 clavells i 3000 margarides. Un empresa A ofereix lots que contenen 30 geranis, 40 clavells i 30 margarides per 15€. Una altra empresa B ofereix lots que contenen 10 geranis, 40 clavells i 50 margarides per 12€. L'Ajuntament compra  $x$  lots a l'empresa A i  $y$  lots a l'empresa B.
- Determineu les inequacions que representen les restriccions a les quals estan sotmesos els valors de  $x$  i  $y$  per tal que compleixin les condicions de la plantació
  - Representeu gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions
  - Trobeu el nombre de lots e cada tipus que fan que la funció despesa sigui mínima, i calculeu aquesta despesa
  - Trobeu quants geranis, clavells i margarides adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim, i quantes plantes i de quin tipus ha adquirit per sobre del mínim que vol plantar.
18. **(PAU 2005)** Un taller pot produir cada dia, com a màxim 12 articles del tipus A i 20 del tipus B. Cada dia, el servei tècnic pot controlar un mínim de 20 articles i un màxim de 25. Sigui  $x$  i  $y$  el nombre d'articles del tipus A i B respectivament, produïts per dia.
- Expresseu les condicions anteriors mitjançant un sistema d'inequacions en  $x$  i  $y$
  - Representeu la regió del pla determinada per aquest sistema
  - Sabem que el benefici de produir els articles del tipus A és el doble del que s'obté amb el article del tipus B. Trobeu quant articles de cada tipus ha de produir el taller per obtenir el màxim benefici

19. **(PAU 2004)** Un taller de confecció fabrica dos models de vestits. Per fer el model A necessitem 2m de teixit de color, 1m de teixit blanc i 4 hores de feina. Per fer el model B es necessiten 2.5m de teixit de color, 0.5m de teixit blanc i 3 hores de feina. El taller disposa cada dia d'un màxim de 250m de teixit de color, 100m de teixit blanc i 380 hores de feina. Anomenarem  $x$  i  $y$  el nombre de vestits dels models A i B, respectivament, fets cada dia.
- Expresseu mitjançant un sistema d'inequacions les restriccions de la producció
  - Representeu gràficament la regió solució
  - La venda d'un vestit del model A aporta al taller un benefici de 5€, i la d'un vestit del model B, un de 4€. Suposem que la producció diària es ven íntegrament, quants vestits de cada tipus cal fer per tal d'obtenir el màxim benefici. Quin és aquest benefici?
  - En aquest últim cas, quin tipus de teixit sobrarà i en quina quantitat?
20. **(PAU 2004)** Sigui  $S$  la regió del pla de coordenades més grans o iguals que zero i tal que els seus punts compleixin aquestes dues condicions:
- La mitjana aritmètica de les coordenades és menor o igual que 5
  - El doble de l'abscissa més l'ordenada és més gran o igual que 5
- Representeu gràficament el conjunt  $S$
  - Determineu en quins punts de  $S$  la funció  $f(x, y) = 2x + y$  pren el valor màxim
21. **(PAU 2002)** En una prova es proposen 10 qüestions de 5 punts i 8 qüestions de 10 punts i es dóna 100 minuts per resoldre-les. Només es valoren els encerts (els errors o respostes en blanc no resten puntuació). L'Anna, que està capacitada per contestar correctament totes les qüestions necessita 4 minuts de mitjana per respondre cada qüestió de 5 punts i 10 minuts per respondre cada qüestió de 10 punts. Quina estratègia ha de seguir (és a dir, quantes preguntes de cada tipus ha de contestar) per obtenir la millor puntuació possible en les seves condicions?
22. **(PAU 2001)** Un pastisser té 150kg de farina, 22kg de sucre i 26kg de mantega per fer dos tipus de pastissos. Es necessiten 3kg de farina, 1kg de sucre i 1kg de mantega per fer una dotzena de pastissos del tipus A, mentre que les quantitats per a una dotzena dels del tipus B són 6kg, 0.5kg o 1kg, respectivament. Si el benefici que s'obté per la venda d'una dotzena de pastissos del tipus A és de 20€ i per una dotzena del tipus B és de 30€, trobeu el nombre de dotzenes de pastissos de cada tipus que ha de fer per maximitzar el seu benefici.

23. **(PAU 2001)** En un taller de confecció es disposa de  $60\text{m}^2$  de tela de cotó i de  $120\text{m}^2$  de tela de llana. Es fan dos tipus de vestits A i B. Per fer un vestit del tipus A es necessiten  $1\text{m}^2$  de cotó i  $3\text{m}^2$  de llana, en canvi, per fer un vestit del tipus B calen  $2\text{m}^2$  de cada tipus de tela.
- a) Quants vestits de cada tipus s'han de fer per obtenir un benefici màxim si per cada vestit (sigui del tipus que sigui) es guanya 30€
  - b) Quina és la resposta a la pregunta anterior si per cada vestit del tipus A es guanya 30€, i en canvi, per cada un del tipus B només es guanya 20€.
24. **(PAU 1997)** Una empresa fabrica dues classes de cargols A i B. En la producció diària se sap que el nombre de cargols de la classe B no supera el nombre de cargols de la classe A més 1000 unitats, que entre totes dues classes no superen 3000 unitats, i que els cargols de la classe B no baixen de 1000 unitats. Sabent que els cargols de la classe A valen 20€ i la unitat i que els de la classe B en valen 15€, calculeu els cost màxim i mínim que pot tenir la producció diària, i digueu amb quants cargols de cada classe s'atenyen aquest màxim i aquest mínim