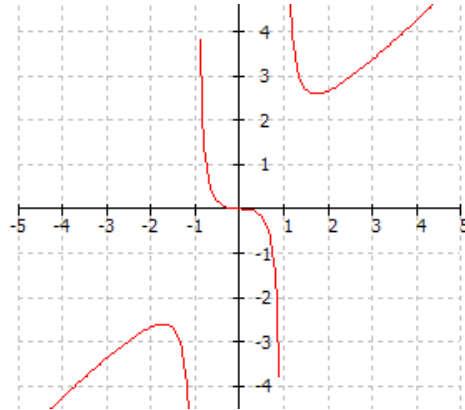


TEMA 4 : Límit de funcions i continuïtat

Activitats

1. Observeu els gràfics següents i contesteu:

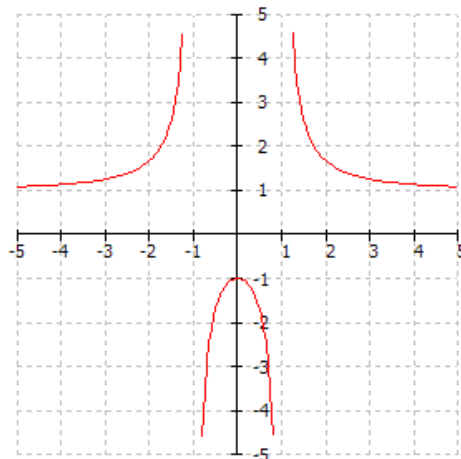
a)



- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

b)



- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

c)

o
o

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

d)

•
o •

o

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

Existeix el límit de la funció per $x = -2$? Justifiqueu la resposta
Quina és la imatge per $x = -2$?

2. Dibuixa el gràfic d'una funció $f(x)$ de la qual sabem :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$
b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$
c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

3. Dibuixa el gràfic d'una funció $f(x)$ de la qual sabem :

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$
c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

4. Calculeu el següents límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x - 3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + x + 2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2x - 10}$

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - 2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

m) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{2x^2 - 1}}{x^2 - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

5. Calculeu el següents límits:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 2x^2}{x^2 + 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 2x^2}{2x^3 + 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^5 + 1}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x-2)(x+1)}{(x-2)(2x+3)}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{-x^2 - 1}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 8x + 6}{x^4 - 2x - 3}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 3}}{\sqrt{2x^3}}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{9x^2 + 5x - 2}}$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 5}{\sqrt{2x^4 + x^2 - 2x}}$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} - \frac{x^2 + 3}{x + 1} \right]$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 2}{x} - \frac{x^2 + 3}{x^3} \right]$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x} \right]$$

$$\text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 + 2} \right]$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 3} + x \right]$$

6. Calculeu el següents límits:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{3x} \right]^x$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{2x-1} \right]^{x+2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x+3}{2x-1} \right]^{x^2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[3 + \frac{x-2}{x+1} \right]^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x+2}{4} \right]^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{4}{x+2} \right]^{\frac{1}{x-2}}$$

7. Estudieu la continuïtat de les següents funcions definides a trossos, en cas de que no siguin contínues, indiqueu els punts i el tipus de discontinuïtat

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$c) \quad h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < -2 \\ -7 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$d) \quad y = \begin{cases} 2^x & \text{si } -11 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

8. Quin valor ha de tenir k en cada una de les següents funcions perquè aquestes siguin contínues?

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ -x + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 4x}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

9. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Trobeu a i b per tal que la funció sigui continua.

10. Calculeu els valors de a i b , que fan continua la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{Si } x < 0 \\ ax + b & \text{Si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{Si } x > 3 \end{cases}$$