

TEMA 4 Límit de funcions i continuïtat

Funció

S'anomena funció real de variable real a tota aplicació que fa correspondre a cada element d'un conjunt inicial (o domini) un i només un element d'un conjunt final (o recorregut).

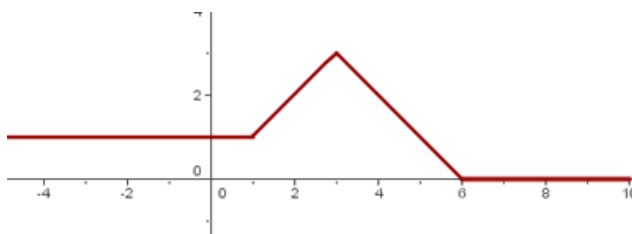
$$y = f(x)$$

La variable x s'anomena variable independent i la variable y variable dependent

Límit d'una funció en un punt

El límit de la funció $f(x)$ en el punt a , es a dir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, és el valor que te la y quan x s'aproxima a a (no quan $x=a$ ja que això seria la imatge de a o $f(a)$).

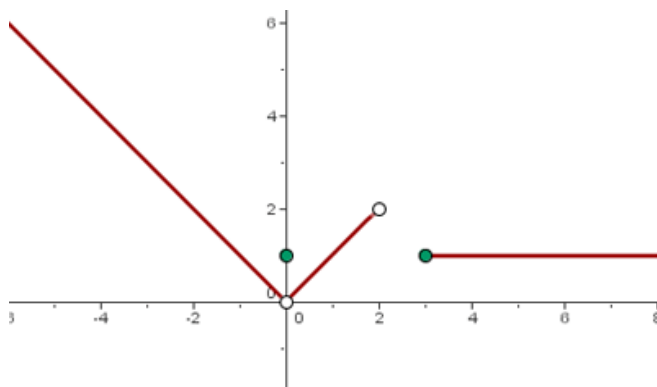
Ex:



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ si ens apropem a $x=0$ per la dreta (quan $x=0,000...01$) o per l'esquerra ($x=-0,000...01$), el valor de la y tendeix a ser 1

• Els límits $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ o límit per la dreta i $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ o límit per l'esquerra, s'anomenen *límits laterals* de la funció $f(x)$

Ex:



Per $x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (valor de la y en apropar-nos per la dreta)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ (valor de la y en apropar-nos per l'esquerra)

- Per tal que existeixi el límit d'una funció en un punt és necessari que existeixin els límits laterals i que siguin iguals, es a dir

$$\text{Si } \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

En el cas anterior, com el límit per la dreta i l'esquerra de 0 són iguals (tots dos valen 0) podem dir que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. A més observem que el límit no té perquè coincidir amb la imatge de $x=0$ per la funció ja que $f(0) = 1$

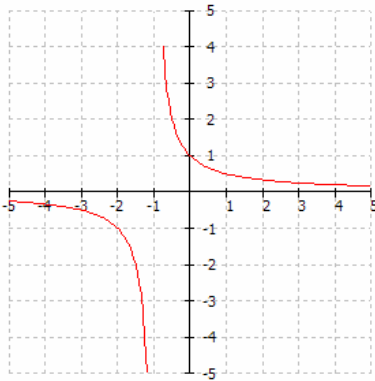
Per contra , si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Límit d'una funció en l'infinit

El límit de $f(x)$ quan x tendeix a $+\infty$ és L , es a dir, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, si per valors de x molt i molt grans el valor de y s'aproxima a L .

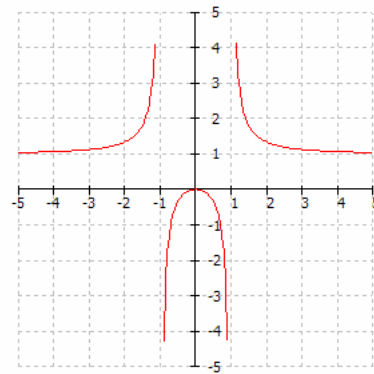
El límit de $f(x)$ quan x tendeix a $-\infty$ és L , es a dir, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, si per valors de x molt i molt petits el valor de y s'aproxima a L .

Ex:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

- Els límits quan x tendeix a $+\infty$ i quan x tendeix a $-\infty$ no tenen perquè coincidir

Càlcul de límits

En el càlcul de límits és necessari operar amb expressions en les que apareix infinit. En alguns casos coneixem el resultat

$$\begin{array}{l} +\infty \pm k = +\infty \\ -\infty \pm k = -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ -(-\infty) = +\infty \end{array} \quad \begin{array}{l} k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \\ k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \\ (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{k}{+\infty} = \frac{k}{-\infty} = 0 \\ \frac{0}{+\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0 \\ \frac{k}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \\ \frac{+\infty}{0} = +\infty \\ \frac{-\infty}{0} = -\infty \end{array} \quad \begin{array}{l} k^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq k < 1 \end{cases} \\ k^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 \leq k < 1 \end{cases} \\ (+\infty)^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases} \\ (+\infty)^{+\infty} = +\infty \\ (+\infty)^{-\infty} = 0 \end{array}$$

en d'altres el resultat pot variar o no existir, és el que s'anomena indeterminacions

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad 0^0$$

i. Càlcul de límits en un punt

a) Substitució. Es substitueix la x per a

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{x-1}{x}} = 3^{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{3}$$

b) Indeterminació $\frac{0}{0}$.

Quan substituïm la x per a de vegades apareix la indeterminació $\frac{0}{0}$.

En aquests casos: descomponem factorialment numerador i denominador, simplifiquem i substituïm

Ex:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{x^3 + 6x^2 - 19x - 24} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^2 + 5 \cdot 3 - 24}{3^3 + 6 \cdot 3^2 - 19 \cdot 3 - 24} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{x^3 + 6x^2 - 19x - 24} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+8)}{(x+1)(x-3)(x+8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

c) Indeterminació $\infty - \infty$

Es fa la resta i després es substitueix

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x^2 - 4} - \frac{2x}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{0} - \frac{4}{0} = \infty - \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)(x+2)} - \frac{2x}{(x-2)(x+1)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+1)}{(x-2)(x+2)(x+1)} - \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 3x - 1}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{1}{0} = \infty\end{aligned}$$

ii. Càlcul de límits en l'infinit

a) Indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = a \text{ on}$$

$$a = 0 \text{ si grau } Q(x) > \text{ grau } P(x)$$

$$a = \infty \text{ si grau } Q(x) < \text{ grau } P(x)$$

$$a = \frac{a}{b} \text{ si grau } Q(x) = \text{ grau } P(x)$$

(on a i b són els coeficients que acompanyen a la x amb el màxim exponent)

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^3 - 1} = 0 \quad \left(\frac{\text{grau}2}{\text{grau}3} \right)$$

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{4x^5 + x} = \frac{1}{4} \quad \left(\frac{\text{grau}5}{\text{grau}5} \right)$$

b) Indeterminació $\infty - \infty$

Hem de diferenciar dos casos:

- Fraccions algebraiques
- Arrels

- Fraccions algebraiques. Hem de fer la resta i calcular el límit

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} - \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \infty - \infty$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2 + 1}{x+1} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x^2 + 1)}{(x-1)(x+1)} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} - \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 1} = 1
\end{aligned}$$

- Arrels. Multipliquem i dividim pel conjugat

Ex:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \infty - \infty \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4x + 8})(x + \sqrt{x^2 - 4x + 8})}{(x + \sqrt{x^2 - 4x + 8})} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x - 8}{(x + \sqrt{x^2 - 4x + 8})} = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} [P(x)]^{Q(x)} = a^\infty$

si $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} [P(x)]^{Q(x)} = \infty$

si $a < 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} [P(x)]^{Q(x)} = 0$

si $a = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} [P(x)]^{Q(x)} = 1^\infty$ Indeterminació

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^x = \infty \quad \text{ja que } 2^\infty \text{ tendeix a } \infty$$

Indeterminació 1^∞ . Hi ha expressions que tenen com a límit el nombre e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx} = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{P(x)}\right)^{P(x)} = e$$

Quan tenim una indeterminació d'aquest tipus podem transformar l'expressió donada en una de semblant a les anteriors de límit conegut

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Q(x)}{P(x)}\right)^{\frac{P(x)}{Q(x)}} = e \quad \text{on } \frac{Q(x)}{P(x)} \text{ tendeix a } 0, \text{ i la fracció inversa a } \infty$$

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{\frac{3x^2-2}{x-1}} = 1^\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{\frac{3x^2-2}{x-1}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+5}{2x-1} - 1\right)^{\frac{3x^2-2}{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{2x-1}\right)^{\frac{3x^2-2}{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{6}} \right]^{\frac{6}{2x-1} \cdot \frac{3x^2-2}{x-1}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{2x-1} \cdot \frac{3x^2-2}{x-1}} = e^9 \end{aligned}$$

També es pot fer servir la fórmula $\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ x \rightarrow a}} (f(x))^{g(x)} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)-1)g(x)}$

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}} = \left(\frac{2}{2}\right)^{+\infty} = 1^\infty \text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2-5}{2x^2}-1\right) \cdot \frac{3x^2-5}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2-5-2x^2}{2x^2}\right) \cdot \frac{3x^2-5}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5x^2+25}{2x^3}\right)} = e^0 = 1$$

Relació de la continuïtat i el límit d'una funció en un punt

- Una funció $f(x)$ és *continua* en un punt $x = c$ sí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Es a dir:

f és continua en $x = c$ si es compleixen les tres condicions següents:

- a) $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- b) $\exists f(c)$
- c) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

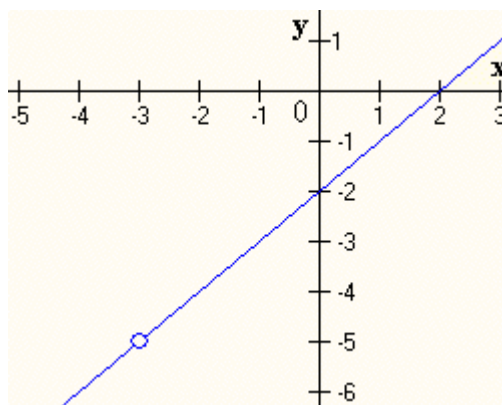
- Una funció és continua si ho és en tots els punts del seu domini. En cas contrari la funció és discontinua.

- Tipus de discontinuïtat:

a) *Evitable*:

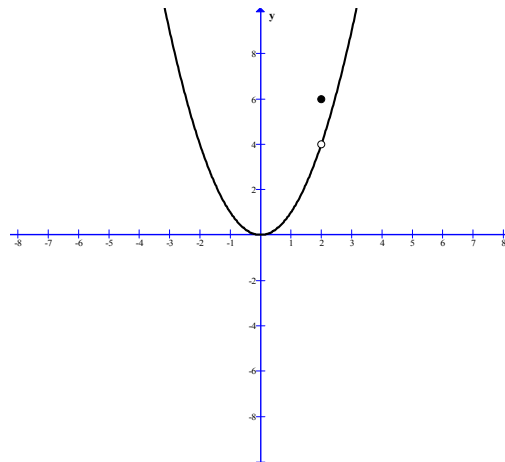
$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \\ \text{Existeix o no } f(c) \end{array} \right\} \text{ però } \lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$$

Ex:



Discontinuitat evitable ("forat") en $(-3, 5)$

Ex: Estudieu la continuïtat de la funció següent en $x = 2$



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \\ f(2) = 6 \end{array} \right\}$$

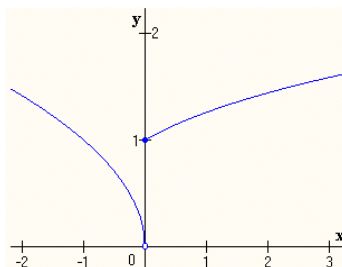
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$$

En $x = 2$ discontinuïtat evitable

b) *Salt*:

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

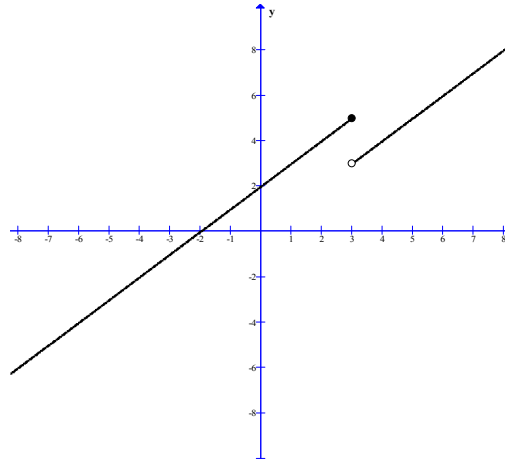
Ex:



Discontinuitat de salt en $x = 0$

Ex: Estudieu la continuïtat de la funció següent en $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

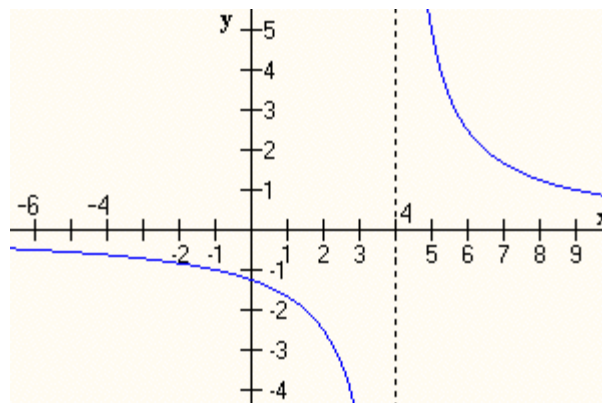


$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x) = 3 \\ f(3) = 5 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

En $x = 3$ discontinuïtat de salt

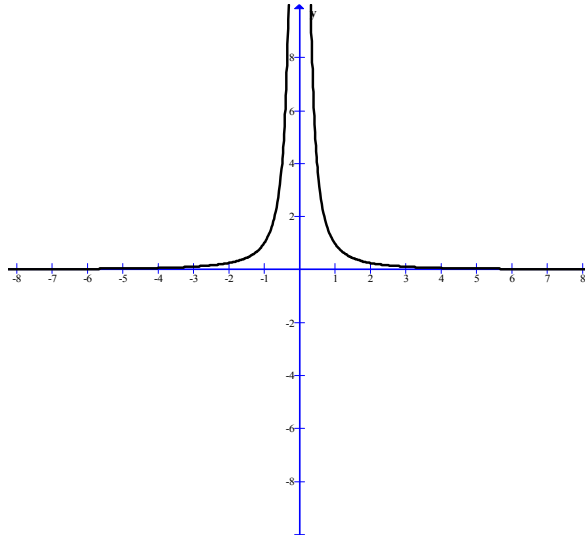
c) *Asimptòtica* : Alguns o els dos límits laterals tendeix a $\pm \infty$

Ex:



Discontinuitat asimptòtica en $x = 4$ (asíptota vertical)

Ex: Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = 0$



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)? \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \nexists f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Discontinuitat asimptòtica en $x = 0$

• Per estudiar la continuïtat d'una funció hem de:

a) determinar els possibles punts de discontinuïtat:

- punts on hi ha un canvi de fórmula (funcions definides a trossos)
- punts que no pertanyen al domini. En el cas de funcions definides a trossos hem de veure que la fórmula no presenti cap valor problemàtic i si per aquest s'aplica la fórmula o no.

b) estudiar per cada punt la imatge i el límit de la funció en aquest punt. En el cas de les funcions definides a trossos haurem de estudiar els límits laterals en aquells punts on hi ha un canvi de fórmula

c) determinar el tipus de discontinuïtat

Ex:

$$f(x) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3x}{x+1} & \text{si } x < 0 \quad \rightarrow \text{ i)} \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \quad \rightarrow \text{ ii)} \\ \frac{2}{3-x} & \text{si } x > 4 \quad \rightarrow \text{ iii)} \end{array} \right.$$

a) Possibles punts de discontinuïtat:

A nivell de canvis de fórmula hem d'estudiar $x=0$ i $x=4$. A nivell de punts que no pertanyen al domini tenim:

i) la fórmula és una fracció algebraica \rightarrow no tenen imatge (no pertanyen al domini) aquells valors que fan 0 el denominador $\rightarrow x = -1$ és un punt problemàtic

ii) la fórmula és un polinomi \rightarrow no hi ha problema

iii) la fórmula és una fracció algebraica $\rightarrow x = 3$ és un punt aparentment problemàtic però, com aquesta expressió es fa servir per valors majors a 4 i no per $x = 3$, aquest no és un possible punt de discontinuïtat

Els punts a estudiar són: $x = 0$, $x = 4$ i $x = -1$.

b)

$$\begin{aligned}x = 0 \quad f(0) &= 0^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x+1} &= \frac{3 \cdot 0}{0+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 &= 0^2 = 0\end{aligned}$$

Com $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ la funció és contínua en $x=0$

$$\begin{aligned}x = 4 \quad f(4) &= 4^2 = 16 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 &= 4^2 = 16 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{3-x} &= \frac{2}{3-4} = -2\end{aligned}$$

Com els límits laterals són finits i diferents hi ha una discontinuïtat de salt en $x=4$

$$\begin{aligned}x = -1 \quad f(-1) &= \frac{3(-1)}{-1+1} = \frac{-3}{0} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x+1} &= \infty\end{aligned}$$

Com el límit és infinit hi ha una asímptota vertical a $x = -1$