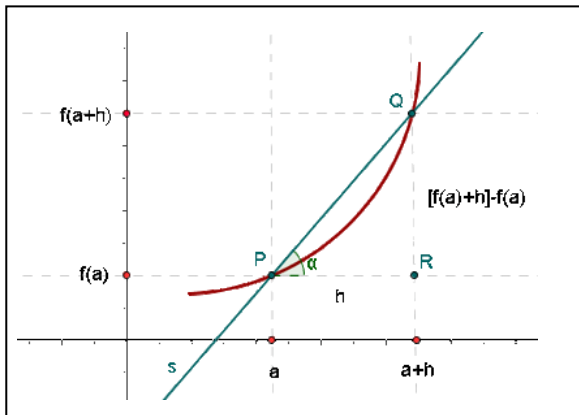


TEMA 5 : Derivades

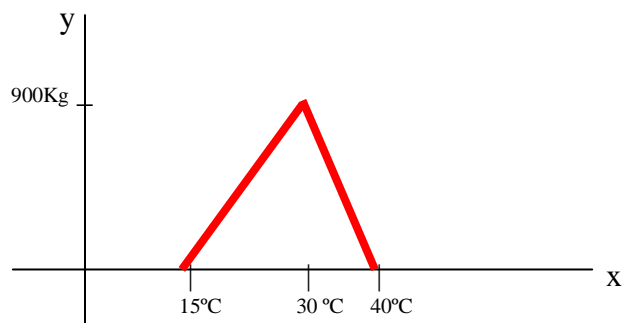
Taxa de variació mitjana

El quocient $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, s'anomena *taxa de variació mitjana* i significa la variació relativa de f en relació a x en l'interval $(a, a+h)$



Gràficament és la pendent de la recta que passa pels punts $P(a, f(a))$ i $Q(a+h, f(a+h))$

Ex: Un hivernacle està destinat al conreu de tomàquets. Sabem que les tomaqueres només produeixen fruits si la temperatura dins l'hivernacle està entre 15°C i 40°C . En el gràfic següent es mostra la producció de tomàquets en Kg segons la temperatura del hivernacle.



Si la temperatura està entre 15°C i 29°C , digues quina serà la variació que experimenta la producció quan la temperatura augmenta 1°C .

Per calcular la variació hem de trobar l'equació de la recta que conté el segment de gràfic que representa la producció (y) des de valors de x de 15 a 30°C . Aquesta recta passa pels punts $(15,0)$ i $(30,900)$

$$y = ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} (15,0) \\ (30,900) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = 15a + b \\ 900 = 30a + b \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 0 = -15a - b \\ 900 = 30a + b \end{array} \right\} \begin{array}{l} 900 = 15a \\ a = 60 \end{array} \quad b = -900$$

$$y = 60x - 900 \text{ per } 15 < x \leq 30$$

Per calcular com varia la producció quan augmenta 1 °C la temperatura es calcula la taxa de variació mitjana

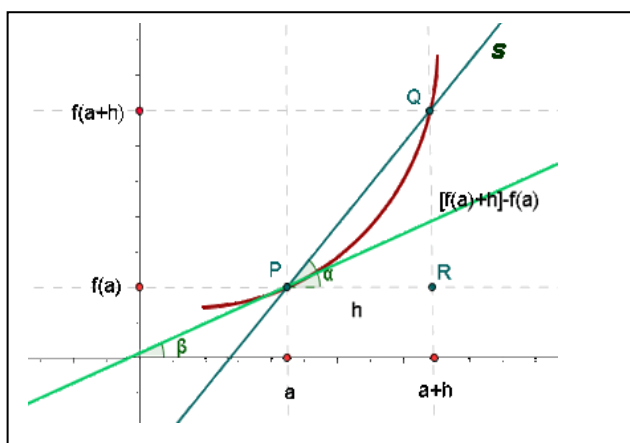
$$TVM([16,30]) = \frac{f(30) - f(16)}{30 - 16} = \frac{(60 \cdot 30 - 900) - (60 \cdot 16 - 900)}{30 - 16} = 60$$

Es a dir, per cada °C de temperatura que augmenta en aquest interval, la producció augmenta en 60Kg.

Derivada d'una funció en un punt

El límit, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si existeix i és finit s'anomena *derivada de la funció f en el punt $x_0 = a$* i es designa per $f'(a)$.

Gràficament $f'(a)$ significa el pendent de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscisses $x_0 = a$



$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$$

- Si existeix $f'(a)$ es diu que f és derivable en $x_0 = a$

Ex: Si $f(x) = x^2$ trobeu la derivada en $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = 2$$

Funció derivada. Derivades successives

- Si una funció f és derivable en tots els punts d'un interval $I = (a,b)$, la funció:

$$f: x \longrightarrow f'(x) \text{ s'anomena funció derivada de } f$$

- Si f' és derivable, la seva derivada f'' s'anomena segona derivada de f , i així successivament, es defineixen f''' , f^{IV} , ..., $f^{(n)}$ (derivada tercera, quarta,.... n-èsima)

Ex: Donada la funció $f(x) = 5x - x^2$,

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) - (x+h)^2 - (5x - x^2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x + 5h - x^2 - 2xh - h^2 - 5x + x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2xh + 5h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h^2 - 2x + 5)}{h} = -2x + 5 \rightarrow f'(x) = -2x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x+h) + 5 - (-2x + 5)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - 2h + 5 + 2x - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2 \rightarrow f''(x) = -2 \end{aligned}$$

$$\bullet f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 + 2}{h} = 0 \rightarrow f'''(x) = 0$$

$$\bullet f^{IV} = \dots = f^{(n)} = 0$$

Regles de derivació

Operacions amb derivades

Funció	Derivada
Producte per un nombre	
$y = k \cdot u$	$y' = k \cdot u'$
Suma i resta	
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
Producte	
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quocient	
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Composició. Regla de la cadena	
$y = u(v(x))$	$y' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Càlcul

a) Derivades de les funcions elementals o immediates. Amb l'ajut de la següent taula podem calcular derivades de funcions tenint en compte les regles de derivació anteriors.

b) Derivades de funcions exponencials compostes o de funcions del tipus $f(x)^{g(x)}$ o u^v .

c) Derivades de funcions en forma implícita

a) Derivada de les funcions elementals

TAULA DE DERIVADES

Funció	Derivada	Exemples		Exemples (regla de la cadena)	
Constant					
$y = k$	$y' = 0$	$y = 8$	$y' = 0$		
Identitat					
$y = x$	$y' = 1$	$y = x$	$y' = 1$		
Funcions potencials					
$y = x^m$	$y' = m \cdot x^{m-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$	$y = (2x^2 + 1)^3$	$y' = 3 \cdot (2x^2 + 1)^2 \cdot 4x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{x}$	$y' = \frac{1x'}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{x}$	$y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \frac{6x}{5 \cdot \sqrt[5]{(3x^2)^4}}$
Funcions exponencials					
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = 3^x$	$y' = 3^x \cdot \ln 3$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} \cdot \ln 5$
Funcions logarítmiques					
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln(x^2 + 7x)$	$y' = \frac{2x + 7}{x^2 + 7x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_2(5x + 7)$	$y' = \frac{5}{(5x + 7) \cdot \ln 5}$
Funcions trigonomètriques					
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin 5x$	$y' = 5 \cdot \cos 5x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos 3x^2$	$y' = -6x \cdot \sin 3x^2$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} 7x$	$y' = (1 + \operatorname{tg}^2(7x)) \cdot 7$
	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$		$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$		$y' = \frac{7}{\cos^2(7x)}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} 3x$	$y' = \frac{3}{1+(3x)^2}$

b) Derivada de funcions del tipus $y = u^v$

Per trobar la derivada d'un funció del tipus $y = u^v$, cal prendre logaritme a totes dues bandes de la igualtat:

$$y = u^v$$

$$\ln y = \ln u^v$$

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

Derivem

$$\frac{y'}{y} = v \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \rightarrow y' = \left(v \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \cdot y$$

Ex: Trobeu la derivada de $y = (3x^2 - 5)^{\sin x}$

$$y = (3x^2 - 5)^{\sin x}$$

$$\ln y = \ln(3x^2 - 5)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(3x^2 - 5)$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)}$$

$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot y$$

$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(3x^2 - 5) + \sin x \cdot \frac{6x}{(3x^2 - 5)} \right) \cdot (3x^2 - 5)^{\sin x}$$

c) Derivada de una funció implícita

Una *funció s'anomena implícita* quan està definida de la forma $F(x,y) = 0$ en lloc de la forma habitual ($y = f(x)$)

Per poder derivar una funció implícita només cal fer servir la regla de la cadena, i tenir present que en el cas de la variable independent (x) es deriva directament i pel que fa a la variable dependent (y) s'ha de considerar que és una funció que depèn de la variable independent i per tant cal aplicar la regla de la cadena (cal posar y')

Ex: Troba la derivada de la funció implícita : $y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$

$$3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' + 5y + 5x \cdot y' + 2x + 1 + y' = 0$$

$$y'(3y^2 + 2y + 5x + 2x + 1) = -5y - 1 \rightarrow y' = \frac{-5y - 1}{3y^2 + 2y + 5x + 2x + 1}$$

Derivades laterals d'una funció en un punt

- S'anomena *derivada per l'esquerra* de f en el punt $x_0 = a$ i es designa per $f'_-(a)$:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- S'anomena *derivada per la dreta* de f en el punt $x_0 = a$ i es designa per $f'_+(a)$:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- f és derivable en el punt $x_0 = a \Leftrightarrow f'_-(a) = f'_+(a)$

Aquest fet cal tenir-ho en compte quan treballem amb funcions definides a trossos.

Estudi de la derivabilitat d'una funció

Si una funció és derivable en un punt, necessàriament és continua:

Derivabilitat \rightarrow Continuïtat
No continuïtat \rightarrow no derivabilitat
Continuïtat \nrightarrow Derivabilitat

Si suposem que una funció f és continua en x_0 (ja que si no és continua no és derivable), si:

$$\left. \begin{array}{l} \exists f'(x_0^-) \\ \exists f'(x_0^+) \end{array} \right\} \text{ i } f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow \exists f'(x_0), \text{ la funció és derivable en } x_0$$

Ex: Estudieu la derivabilitat de la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Continuïtat

- si $x < 2 \rightarrow f(x) = x^2 \rightarrow$ polinomi \rightarrow continua i derivable
- si $x > 2 \rightarrow f(x) = 3x - 2$ polinomi \rightarrow continua i derivable
- si $x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 4 \end{array} \right\} \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \rightarrow f \text{ és continua en } x = 2$$

$f(x)$ és continua en \mathbb{R}

b) Derivabilitat

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(2) = 4 \\ f'_+(2) = 3 \end{array} \right\} \nexists f'(x) \rightarrow f \text{ no és derivable en } x = 2$$

f és continua en \mathbb{R} i derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$

Ex: Calculeu m i n perquè la funció següent sigui derivable en $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si f és derivable en $x = 1 \rightarrow f$ és continua en $x = 1$

Continuïtat $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 5x + m) = m - 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + nx) = n - 1 \end{array} \right\} m - 4 = n - 1$$

Derivabilitat $\rightarrow f_1^-(1) = f_1^+(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(1) = -3 \\ f'_+(1) = n - 2 \end{array} \right\} -3 = n - 2 \rightarrow n = -1 \longrightarrow m - 4 = -1 - 1 \rightarrow m = 2$$