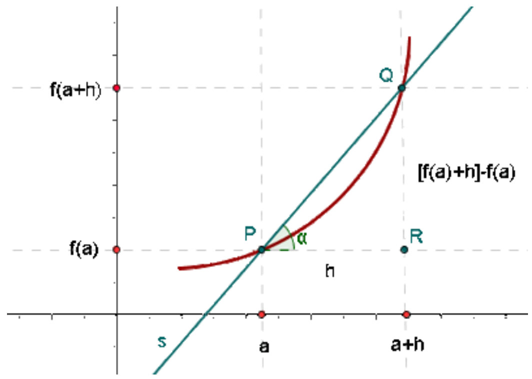
TEMA 6 : Aplicacions de les derivades

<u>Derivades: aplicacions</u>

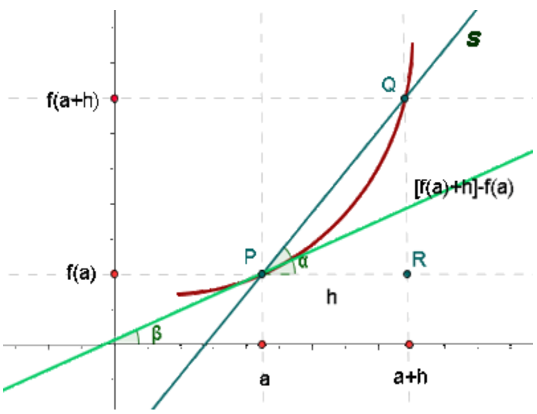
- Recta tangent i normal a una corba en un dels seus punts
- Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims
- Concavitat i convexitat d'una funció. Punts d'inflexió
- Problemes d'optimització

<u>Recta tangent i normal a una corba en un dels seus punts</u>

Recordem que el quocient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, s'anomena *taxa de variació mitjana* i gràficament és la pendent de la recta secant a la corba que passa pels punts P = (a, f(a)) i Q = (a + h, f(a + h))



Observem que si el punt Q s'apropa al punt P fins al punt que h és pràcticament 0, la recta ara és tangent a la corba, ja que només la toca en un punt i el límit, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si existeix és ara el pendent d'aquesta nova recta que coincideix amb la derivada de la funció f en el punt x_0 = a. Es a dir, gràficament f'(a) és el pendent de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscisses x_0 = a , ja que f'(a) = tg α



Així, l'obtenció de la recta tangent a una corba en un dels seus punts és l'aplicació més immediata de les derivades.

Recordem que l' equació punt-pendent d'una recta és:

$y - y_0 = m\cdot(x - x_0)$ on m és el pendent i (x_0,y_0) és un punt de pas

si f(x) és derivable en x_0, el pendent de la recta tangent en el punt $P=(x_0,y_0)$ és $f'(x_0)$ i l'equació de la recta tangent a la gràfica de f(x) en aquest punt és:

$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$ *Equació de la recta tangent*

Ex: Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+3}$ en $x_0= 3$

f és continua i derivable en x_0

$$y_0 = y(3) = \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x-x-3)-x^2+2x}{(x+3)^2} =$$

$$\frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$$

$$f'(3) = \frac{9+18-6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Equació de la recta tangent: $\boxed{\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}(x-3)}$

Anomenem *recta normal* a una corba en un dels seus punt, a la recta perpendicular a la recta tangent a la corba en aquest punt.
Recordant la condició de perpendicularitat de dues rectes, la pendent de la recta normal a la funció f(x) en el punt x_0 serà: $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ i la seva equació serà:

$\boxed{y - y_0 = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}$ *Equació de la recta normal*

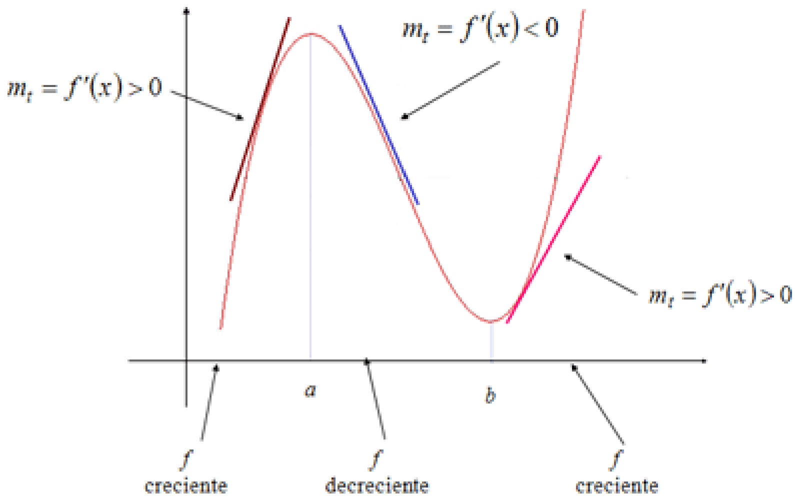
Ex: Trobeu l'equació de la recta normal a la corba del exemple anterior en el punt $x_0= 3$

Equació de la recta normal: $\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{-12}{7}(x-3)$

Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims

Una funció és creixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x \in (a,b)$

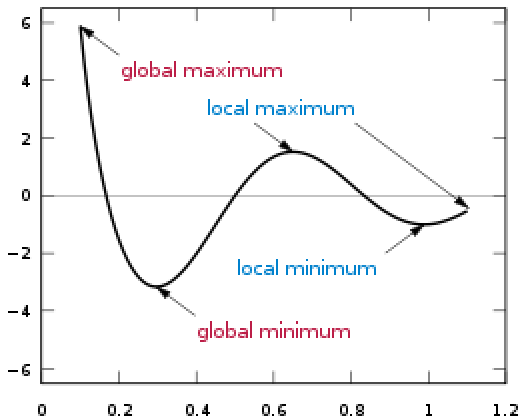
Una funció és decreixent en un interval (a,b), si $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Si f(x) és derivable en (a,b) $\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x \in (a,b)$



• S'anomenen extrems relatius (màxims o mínims) a aquells punts on el valor de la funció és màxim o mínim en un interval de la mateixa. En aquests punts la recta tangent a la corba serà horitzontal i el seu pendent 0, així,

f(x) té un màxim en x_0 si $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0)<0$

f(x) té un mínim en x_0 si $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0)>0$



Ex: Estudieu els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Possibles màxims o mínims de f(x) $\rightarrow$ f '(x) = 0

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm 1$$

La recta real, com no hi problemes de domini, queda dividida en tres intervals

(- ∞ , - 1)	$\rightarrow x = -2$	*f '(-2) > 0*	*creixent*
(- 1 , 1)	$\rightarrow x = 0$	*f '(0) < 0*	*decreixent*
(1 , + ∞)	$\rightarrow x = 2$	*f '(2) > 0*	*creixent*

Ex: Estudieu els intervals de creixement/decreixement i els extrems relatius de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Dom f = |R – {-1}

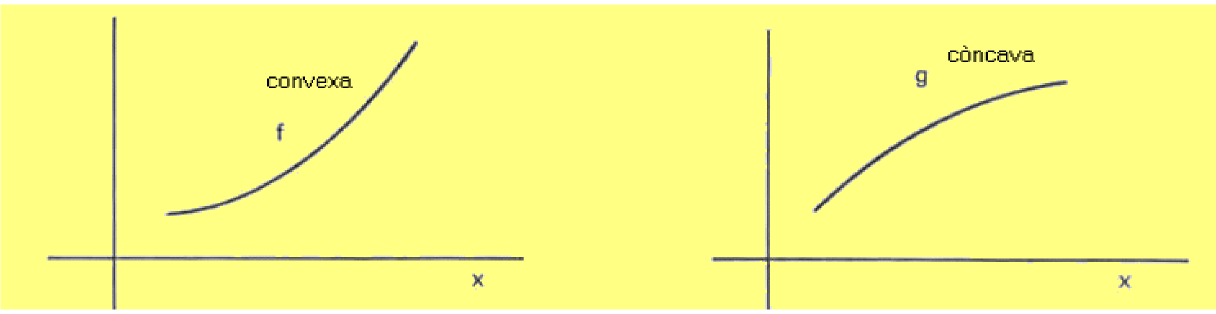
$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x+1) - (x^2-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

El possible extrem relatiu no pertany al domini, serà un punt de discontinuïtat, però l'haurem de tenir en compte en el moment de dividir la recta real en intervals per estudiar el signe de la derivada.

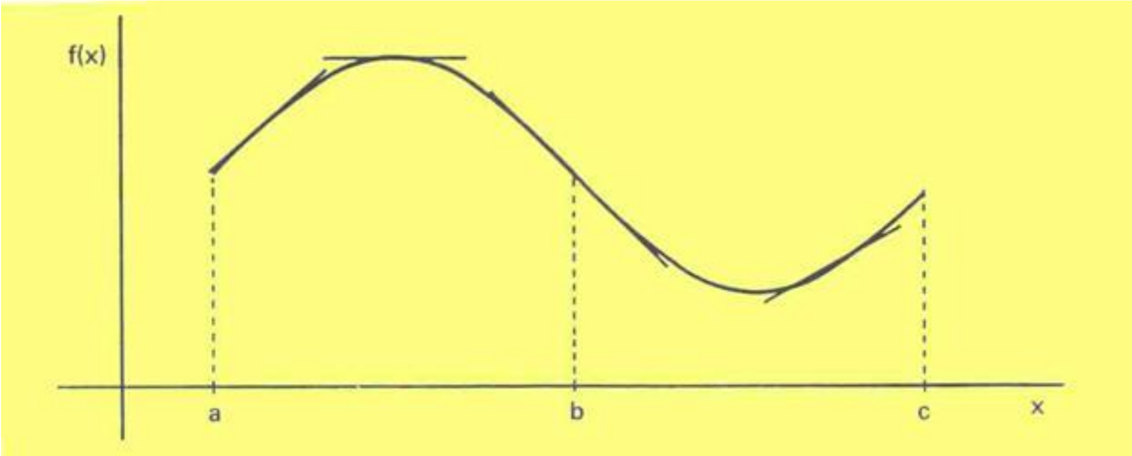
(- ∞ , - 1)	$\rightarrow x = -2$	*f '(-2) > 0*	*creixent*
(- 1 , + ∞)	$\rightarrow x = 2$	*f '(2) > 0*	*creixent*

Concavitat i convexitat d'una funció. Punts d'inflexió



Observem el següent gràfic,

f(x) és còncava en l'interval (a,b) quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sobre del gràfic. Si f ''(x)<0 $\Rightarrow$ és còncava en x f(x) és convexa en l'interval (b,c) quan les rectes tangents a la corba en els punts de l'interval es troben per sota del gràfic. Si $f''(x)>0 \Rightarrow$ és convexa en x



• S' anomena punt d'inflexió a aquell on es produeix un canvi de concavitat a convexitat o al reves (al gràfic x=b és un punt d'inflexió).

Si f (x) i f '(x) són derivables en x_0, si x_0 és un punt d'inflexió $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$

$f'''(x_0) \neq 0$

Ex: Punts d'inflexió de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ *Dom = |R*

$f''(x) = 6x$

Possibles punts d'inflexió de f(x) $\rightarrow f''(x) = 0$

$6x = 0$

$x = 0$

$f'''(0) = 6 \neq 0$ *(0 , 2) és un punt d'inflexió de f(x)*

Resum de l'estudi de la concavitat, convexitat i punts d'inflexió.

$f''(a) > 0 \quad f \quad convexa \quad en \quad a$

$f''(a) < 0 \quad f \quad còncava \quad en \quad a$

$$f''(a) = 0 \begin{cases} f'''(a) \neq 0 \quad a \quad punt \quad d'inflexió \\ f'''(a) = 0 \begin{cases} f''''(a) > 0 \quad f \quad convexa \quad en \quad a \\ f''''(a) < 0 \quad f \quad còncava \quad en \quad a \\ f''''(a) = 0 \{ etc... \end{cases} \end{cases}$$

Problemes d'optimització

Es tracta de fer màxima o mínima una funció. Aquesta pot venir donada per una o dues incògnites, en aquest cas cal expressar una d'elles a partir de l'altre

Ex: S'ha de construir un dipòsit cilíndric de 81π m^3 de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 €/m^2, i les dues bases amb un material que costa 45 €/m^2.

a) Determineu la relació que hi ha entre el radi r de les dues bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost C (r) del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r
b) Quines dimensions ha de tenir el dipòsit perquè el cost dels materials necessaris sigui el mínim possible?

a)

Volum cilindre: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Superfície lateral: $S_l = 2\pi \cdot r \cdot h$

Superfície bases: $S_b = 2 \cdot \pi \cdot r^2$

Cost: $C = 30 \cdot S_l + 45 \cdot S_b$

$C(r, h) = 30 \cdot 2\pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

La relació entre el radi r i l'altura h es calcula a partir del volum:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$81\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$h = \frac{81\pi}{r^2}$$

b)

Funció a minimitzar: $C(r, h) = 30 \cdot 2\pi \cdot r \cdot h + 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$$C(r) = 60\pi \cdot r \cdot \frac{81\pi}{r^2} + 90\pi \cdot r^2$$

$$C(r) = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi \cdot r^2$$

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

Extrems relatius: $C'(r) = 0$

$$0 = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi \cdot r$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4860\pi}{180\pi}} = 3$$

Comprovem que r = 3 sigui un mínim amb la derivada segona:

$$C''(r) = \frac{9720\pi}{r^3} + 180\pi$$

C ‘’ (3) > 0   a r = 3 hi ha un mínim

radi = 3m i altura = 9 m