

## Tema 7: FUNCIONS

### Concepte de funció

En moltes ocasions la paraula “funció” es pot substituir per “depèn” i es que una funció reflecteix la relació de dependència entre dues característiques.

Una funció és una relació entre dues variables numèriques  $x$  i  $y$ , de forma que a cada valor de  $x$  li correspon un, i només un, valor de  $y$ .

A  $x$  s'anomena **variable independent** i a  $y$  s'anomena **variable dependent**, ja que el seu valor depèn del valor de  $x$ .

### Com s'expressa una funció?

Una funció es pot expressar per:

- un enunciat
- una taula
- un gràfic
- una fórmula

Ex:

- *Un tècnic en calefacció cobra 40 € per desplaçar-se fins a casa nostra i 65 € per cada hora de feina. ( Enunciat )*

- *Taula:*

*Com el preu depèn de les hores de feina assignem*

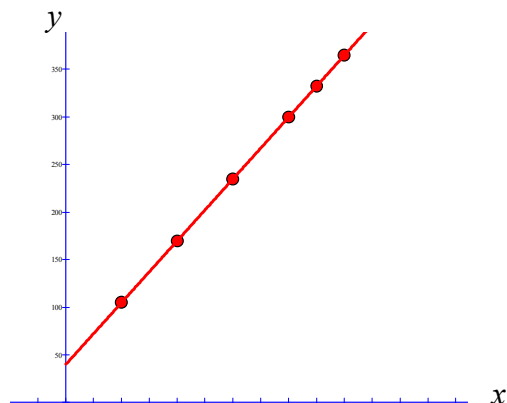
*$x = \text{hores de feina}$*

*$y = \text{preu}$*

Hores de feina $x$	1	2	3	4	4,5	5
Preu $y$	$40+65 \cdot 1$	$40+65 \cdot 2$	$40+65 \cdot 3$	$40+65 \cdot 4$	$40+65 \cdot 4,5$	$40+65 \cdot 5$

*Aquesta taula ens dona una sèrie de punts que podem representar en un gràfic*  
 $P_1 = (1, 105)$ ,  $P_2 = (2, 170)$ , ...

- *Gràfic:*



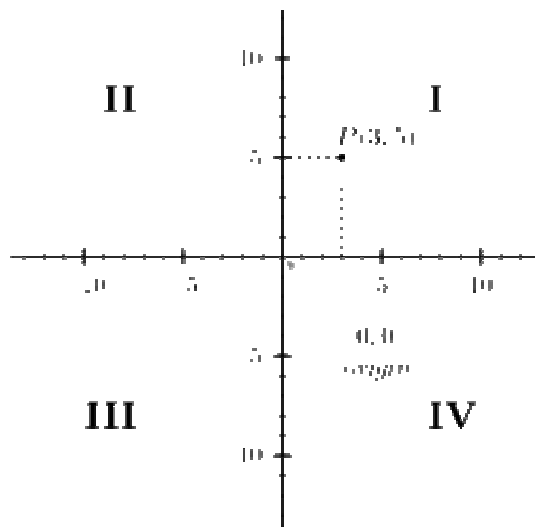
Observem que en aquest cas en poden lligar els punts obtinguts de la taula perquè és possible que estigui una quantitat decimal de hores

- Fórmula:  $Preu = 40 + 65 \cdot n^{\circ} \text{ d'hores}$   
 $y = 40 + 65 \cdot x$

- Per fer un gràfic s'utilitza el que s'anomena un **eix de coordenades**, format per un
  - eix horitzontal OX (abscisses), i un
  - eix vertical OY (ordenades)

Un punt P del pla queda determinat per un parell de nombres (a,b) anomenats coordenades, on *a* es la mesura sobre l'eix horitzontal i *b* sobre l'eix vertical.

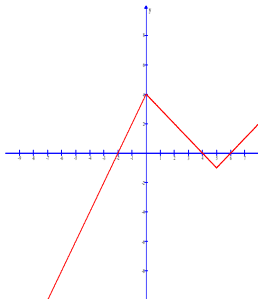
Ex: el punt P = ( 3 , 5 )



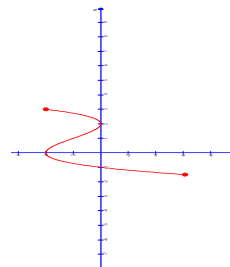
- Observem que, com ja hem indicat, en una funció a cada valor de *x* li correspon un **únic valor de y**.

Ex: Quins dels gràfics següents correspon a una funció?

a)



b)



El gràfic b no correspon a una funció ja que a un valor de *x*, per exemple, a  $x = -2$  li corresponen dos valors de *y*,  $y = 0$  i  $y = 3$

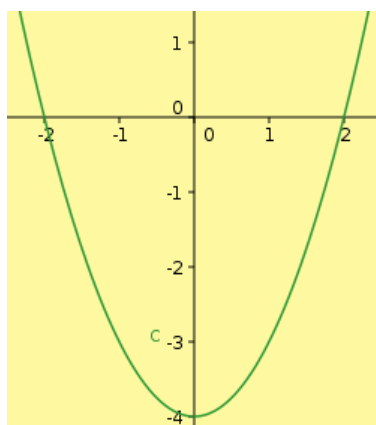
### Característiques d'una funció

En representar gràficament una funció, podem determinar una sèrie de característiques:

- i) Punts de tall amb els eixos;
- ii) Continuitat / Discontinuitat;
- iii) Creixement / Decreixement;
- iv) Màxims i mínims

i) **Punts de tall amb els eixos.** Són els punts on el gràfic de la funció “toca” als eixos de coordenades.

Ex:



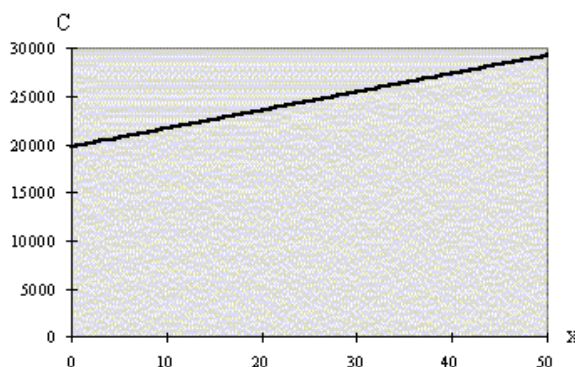
*Punts de tall amb*  
*- l'eix x:  $(-2, 0)$  i  $(2, 0)$*   
*- l'eix y:  $(0, -4)$*

ii) **Continuitat / Discontinuitat.** Una funció és contínua si es pot dibuixar el gràfic amb un sol traç, es a dir, sense aixecar el llapis del paper. Una funció és discontinua si te més d'un traç.

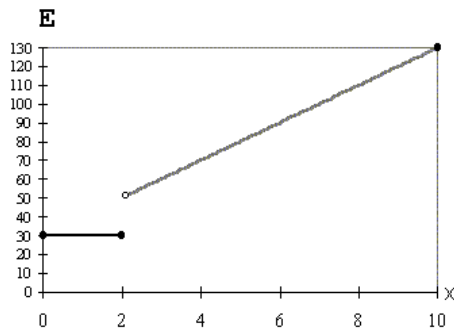
Ex: Una fàbrica de gel té unes despeses mensuals ( y ) que depenen del nombre de tones produïdes en un mes ( x ), segons la fórmula

$$y = 19801,5 + 189,67 x$$

de manera que si fem una taula de valors i representem gràficament els resultats, donat que es poden unir els punts per què és possible qualsevol valor de producció de gel (x) entre 0 i 50 tones, el gràfic ens mostra que és una funció contínua

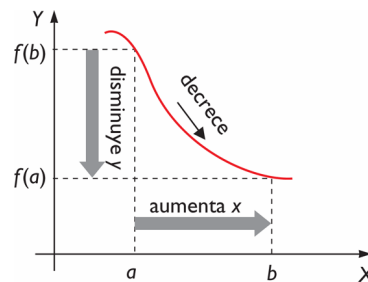
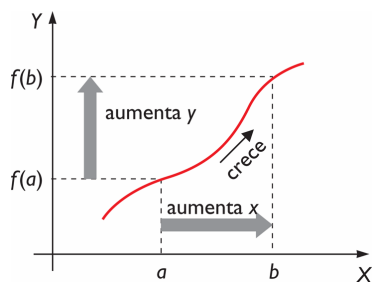


Ex:

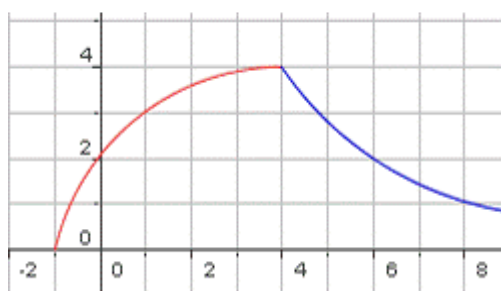


Aquesta funció és discontinua en  $x=2$

iii) **Creixement / Decreixement.** Una funció és creixent en un tram, o interval de valors de  $x$ , si quan augmenta el valor de  $x$  augmenta el valor de  $y$ . Una funció és decreixent en un interval de valors de  $x$  si quan augmenta el valor de  $x$  disminueix el valor de  $y$ .



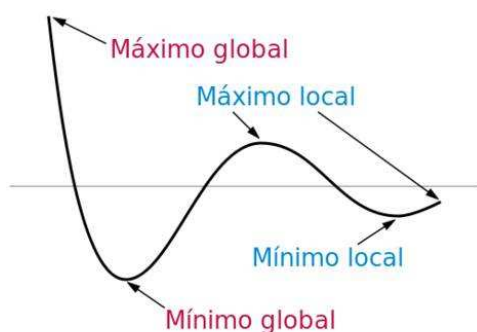
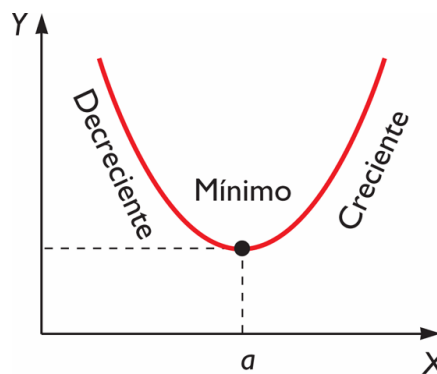
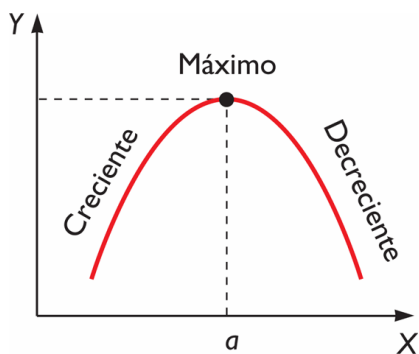
Ex:



*Creixent*  
per a valors de  $x$  des de  $-1$  a  $4$

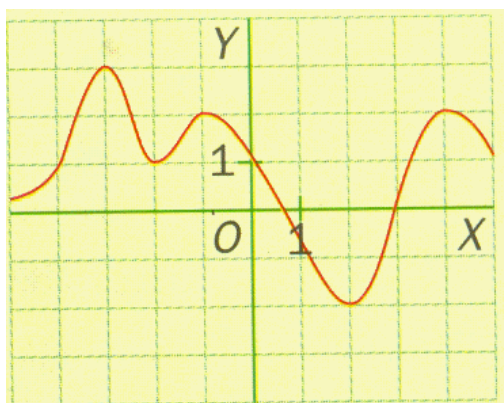
*Decreixent*  
per a valors de  $x$  des de  $4$  a  $9$

iv) **Màxims i mínims.** Són punts on la funció canvia el seu comportament. Una funció presenta un màxim en un punt si en ell passa de ser creixent a decreixent. Una funció presenta un mínim en un punt si en ell passa de ser decreixent a creixent.



En el punto on la y té el seu valor màxim diem que hi ha un màxim global, mentre que en el punt on la y té el seu valor més petit diem que hi ha un mínim global.

Ex:



*Màxim absolut:*  $(-3, 3)$   
*Màxim relatiu:*  $(-1, 2)$  i  $(4, 2)$

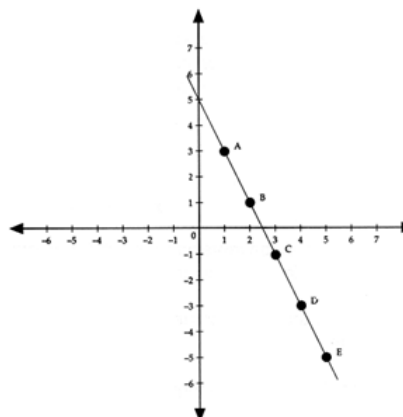
*Mínim absolut:*  $(2, -2)$   
*Mínim relatiu:*  $(-2, 1)$

### Funcions que tenen com a gràfic una recta

Hem vist que una funció es pot representar a través d'una fórmula on el valor de  $y$  depèn del valor de  $x$ . De fet, amb aquesta fórmula es fa una taula de valors on donem valors a la  $x$  per obtenir els valors corresponents de  $y$  i, d'aquesta manera, una sèrie de punts per fer el gràfic.

Ex: Representeu gràficament la funció donada per la fórmula  $y = -2x + 5$

$x$	$y = -2x + 5$
1	3 $(-2 \cdot 1 + 5) \rightarrow$ punt A
2	1 $(-2 \cdot 2 + 5) \rightarrow$ punt B
3	-1 $\rightarrow$ punt C
4	-3 $\rightarrow$ punt D
5	-5 $\rightarrow$ punt E



Els gràfics que es poden obtenir són rectes, diferents tipus de corbes, ... però **només veient la fórmula podem determinar si el gràfic que obtindrem serà una recta o no, i quin tipus de recta serà.**

RECTES			
Fórmula	Funcions	Gràfic	Passa per (0,0)?
$y = ax + b$	Afi	Recta obliqua creixent si $a > 0$ decreixent si $a < 0$	No
$y = ax$	Lineal o de proporcionalitat directa		Si
$y = b$	Constant	Recta horitzontal	-

on  $a$  és el coeficient ( nombre ) que acompanya a la  $x$ . Aquest nombre rep el nom de **pendent** ja que el seu valor ens indica el grau d'inclinació de la recta i si aquesta és creixent o decreixent. Observem que en el cas de les funcions constants la  $a = 0$  ja que

$$y = ax + b$$

$$y = 0 \cdot x + b$$

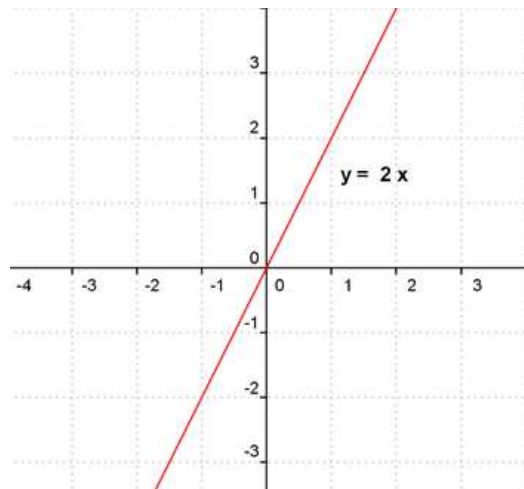
$$y = b$$

la qual cosa ens indica que el grau d'inclinació o pendent és 0 i que la recta és horitzontal.

Ex<sub>1</sub>: Representar gràficament  $y = 2x$

Per la fórmula veiem que és una funció lineal o de proporcionalitat directa, que tindrà per gràfic una recta creixent ( $a=2>0$ ) que passa per  $(0,0)$ .

$x$	1	0	-1
$y$	2	0	-2

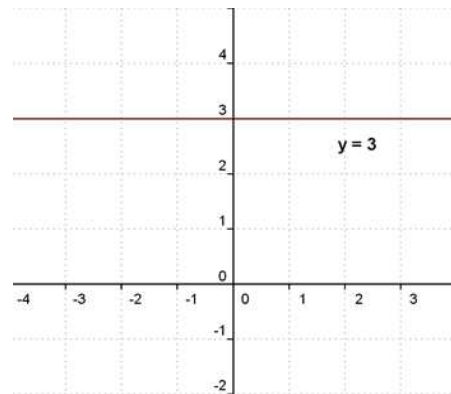


Ex<sub>2</sub>: Representar gràficament  $y = 3$

Per la fórmula veiem que és una funció constant, que tindrà per gràfic una recta horitzontal ( $a=0$ ).

Observem que, per a qualsevol valor de  $x$  la  $y = 3$ ,

$x$	1	0	-1
$y$	3	3	3



### Resolució gràfica d'un sistema d'equacions

Un sistema d'equacions amb dos incògnites es pot resoldre gràficament. Per això cal deixar sola la  $y$  de totes dues equacions i representar les rectes obtingudes.

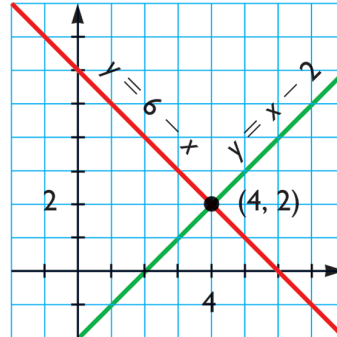
Ens podem trobar amb tres casos:

- les rectes coincideixen  $\rightarrow$  sistema compatible indeterminat amb infinites solucions;
- les rectes són secants i coincideixen en un únic punt  $\rightarrow$  sistema compatible determinat amb una única solució donada pels valors  $x$  i  $y$  del punt;
- les rectes són paral·leles  $\rightarrow$  sistema incompatible sense solució ja que no tenen cap punt comú.

Ex: Resoldre gràficament el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow r_1: y = 6 - x \\ \rightarrow r_2: y = x - 2 \end{array}$$

$x$	$y_1 = 6 - x$	$y_2 = x - 2$
0	6	-2
1	5	-1
2	4	0
3	3	1
4	2	2
5	1	3



*Sistema compatible determinat*  
*Solució:  $x = 4$  i  $y = 2$*