TEMA 4: Equacions exponencials i logarítmiques

4.1. EXPONENCIALS

Definim exponencial de base a i exponent n: $a \ldots \ldots^{n)} \ldots . a = a^n$

Propietats de les exponencials:

(1) $a^x . a^y = a^{x+y}$

(2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $a^0 = 1$

(5) $a^1 = a$

4.2. EQUACIONS EXPONENCIALS

Anomenarem **equacions exponencials** a aquelles equacions en les quals hi ha una incògnita a l'exponent:

Exemples:

a. $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

b. $5^{x^2-5x+6} = 1$

c. $2^x + 2^{x+1} = 12$

d. $2^x = 12$

La resolució serà senzilla en el cas que es puguin expressar amb la mateixa base, sinó cal introduir un concepte matemàtic nou que ens permetrà resoldre-les sempre: el logaritme.

Exemples:

a. $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

   ho expressem en base 3: $3^{1-x^2} = 3^{-3}$ i igualem exponents: $1 - x^2 = -3$

   Les solucions són $x = \pm 2$

b. $5^{x^2-5x+6} = 1$

   ho expressem en base 5: $5^{x^2-5x+6} = 5^0$ i igualem exponents: $x^2 - 5x + 6 = 0$

   Les solucions són $x = 2 \; i \; x = 3$

c. $2^x + 2^{x+1} = 12$

   expressem $2^{x+1} = 2^x . 2$ i fem el canvi $2^x = a$: $a + 2a = 12$, és a dir, a = 4. Si desfem el canvi fet: $2^x = a \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2$, la solució és $x = 2$

d. $2^x = 12$

   no podem expressar el 12 en base 2 !! De moment no ho sabem resoldre.

4.3. LOGARITMES

Anomenarem **logaritme en base *a* de *p*** (*a* > 0) a l'exponent al qual cal elevar ***a*** per obtenir ***p***: $log_a p = x \Leftrightarrow a^x = p$

Exemples:

a) $log_2 8 = 3$, ja que $2^3 = 8$
b) $log_5 25 = 2$, ja que $5^2 = 25$
c) $log_2 \frac{1}{8} = -3$, ja que $2^{-3} = \frac{1}{8}$

Si la base és 10 es tracta d'un **logaritme decimal** i es designa simplement per ***log p.***
Si la base és e = 2.7182818.... es tracta d'un **logaritme neperià** i es designa per ***ln p.***

Propietats dels logaritmes:

1. $log_a a = 1$
2. $log_a 1 = 0$
3. $log_a (p \cdot q) = log_a p + log_a q$
4. $log_a \left(\frac{p}{q}\right) = log_a p - log_a q$
5. $log_a (p)^n = log_a p + log_a q$
6. $log_a p = \frac{log_b p}{log_b a}$ (canvi de base)

4.4. EQUACIONS LOGARÍTMIQUES

Les equacions logarítmiques son aquelles equacions en les quals hi ha una incògnita dintre d'un logaritme:

Exemples:

a) $logx + log4 = 2$
b) $\log(x+1) + \log(x-1) = log3$

Per a resoldre les equacions logarítmiques s'han de seguir els passos següents:

- Deixar els logaritmes en la mateixa base;
- deixar un únic logaritme en les dues bandes de la igualtat;
- eliminar les logaritmes a les dues bandes i resoldre l'equació sense logaritmes;
- si en una banda de la igualtat no hi ha logaritmes, aplicar la definició per transformar-la amb una potencia;
- comprovar els resultats obtinguts, ja que es poden obtenir resultats que no siguin solució de l'equació inicial.

Exemples:

a) $logx + log4x = 2$

Aplicant la tercera propietat dels logaritmes a l'esquerra de la igualtat, obtenim: $logx + log4x = log4x^2$

Aleshores: $logx + log4 = 2 \Leftrightarrow log4x^2 = 2$.

Si apliquem la definició de logaritme: $4x^2 = 10^2$

Les solucions seran: $x = \pm 5$

Si fem la comprovació obtenim que només $x = 5$ és solució ja que log(–5) no existeix.

b) $\log(x+1) + \log(x-1) = log3$

Aplicant la tercera propietat dels logaritmes a l'esquerra de la igualtat, obtenim: $log[(x+1)(x-1)] = log3 \Leftrightarrow \log(x^2-1) = log3$

És a dir, hem de resoldre l'equació: $x^2 - 1 = 3$

Les solucions seran: $x = \pm 2$

Si fem la comprovació obtenim que només $x = 2$ és solució ja que ni *log*(–1) ni *log*(–3) existeixen.

A més, amb els logaritmes podem resoldre aquelles equacions exponencials que no les podíem transformar amb la mateixa base. Si tornem a l'exemple que no havíem pogut resoldre abans:

d. $2^x = 12$

Apliquem el logaritme a les dues bandes de la igualtat: $log2^x = log12$

Si ara apliquem la propietat cinquena a l'esquerra de la igualtat, obtenim:

$$xlog2 = log12 \Rightarrow x = \frac{log12}{log2}$$

4.5. FUNCIÓ EXPONENCIAL

Definim funció exponencial de base *a* com la funció que a cada valor *x* li fa correspondre a^x , on *a* es un nombre real positiu:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \rightarrow a^x$$

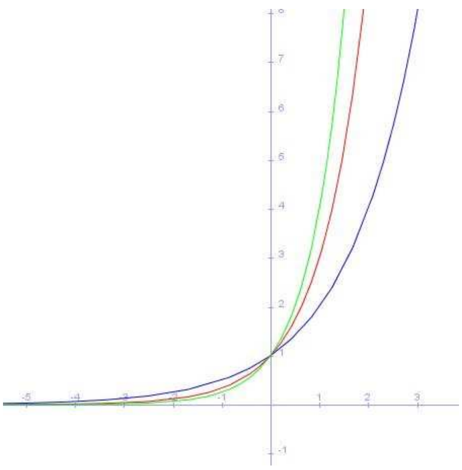
Exemple: $f(x) = 2^x \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ f(0) = 2^0 = 1 \\ f(1) = 2^1 = 2 \\ f(2) = 2^2 = 4 \end{cases}$

En general parlarem de funció exponencial quan la incògnita o indeterminada es troba en l'exponent.

NOTA
No s'ha de confondre una exponencial a^x amb una potencia x^n, on la incògnita es troba a la base.

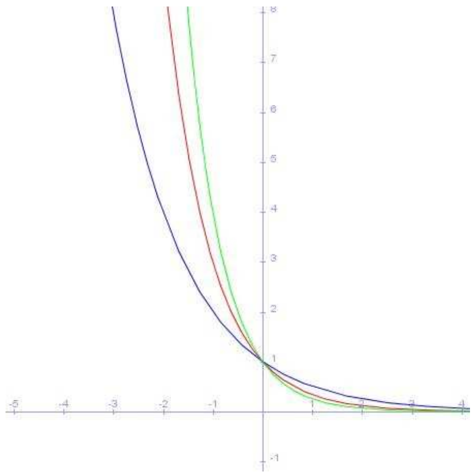
Per fer la representació gràfica d'una funció exponencial cal distingir si la base –que sempre és positiva– és major o menor que 1.

Si $a > 1$:



$f(x)=2^x$ **$f(x)=3^x$** **$f(x)=4^x$**

Si $0 < a < 1$:



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Les característiques principals de la funció exponencial són les següents:
- Per qualsevol valor x real sempre es pot calcular a^x. El domini de la funció són tots els valors reals.
- Per a qualsevol valor x real sempre obtindrem un valor positiu de a^x. El recorregut de la funció son tots els valors reals positius.
- No talla mai a l'eix OX i talla a l'eix OY en (0,1)
- Si a > 1 → la funció és sempre creixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim.
- Si 0 < a < 1 → la funció es sempre decreixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim.

4.6. FUNCIÓ LOGARITMICA

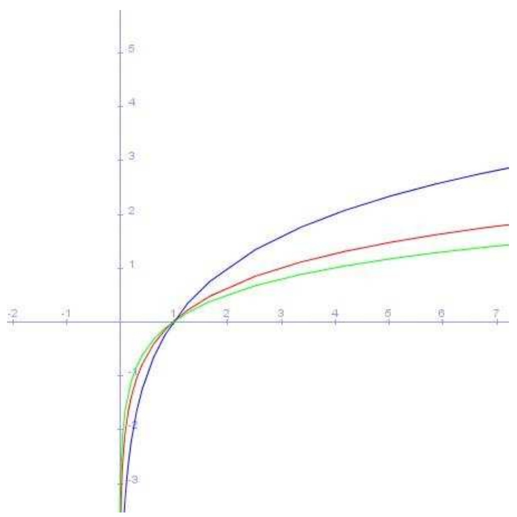
Definim funció logarítmica de base *a* la funció que a cada valor *x* li fa correspondre $log_a\, x$, on *a* és un nombre real positiu:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow log_a x$$

Exemple: $f(x) = log_2 x \Rightarrow \begin{cases} f(16) = log_2 16 = 4 \\ f(8) = log_2 8 = 3 \\ f(4) = log_2 4 = 2 \\ f(2) = log_2 2 = 1 \\ f(1) = log_2 1 = 0 \end{cases}$

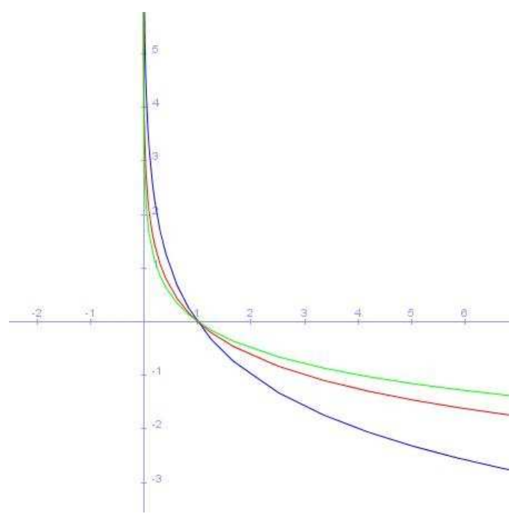
Per fer la seva representació gràfica també cal distingir pel valor de la base:

Si $a > 1$:



$f(x) = log_2 x$ $f(x) = log_3 x$ $f(x) = log_4 x$

Si $0 < a < 1$:



$f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$ $f(x) = log_{\frac{1}{3}} x$ $f(x) = log_{\frac{1}{4}} x$

Les característiques principals de la funció exponencial són les següents:

- Només podem calcular $log_a x$ per a valors positius de la incògnita . El domini de la funció són tots els valors reals positius.
- $log_a\, x$ pot prendre qualsevol valor real. El recorregut de la funció són tots els valors reals.
- No talla mai a l'eix OY i talla a l'eix OX en (1,0).
- Si a > 1 ⟶ la funció és sempre creixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim.
- Si 0 < a < 1 ⟶ la funció és sempre decreixent, i no presenta ni cap màxim ni cap mínim.