

## TEMA 6: Derivades. Tècniques de derivació

### *Full de preparació*

Aquest full s'ha de lliurar el dia de la prova

Nom:..... Curs: .....

1. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les següents funcions en els punts indicats:
  - 1)  $f(x) = x^2 + 2x$  en  $x = -1$
  - 2)  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  en  $x = 2$
  - 3)  $f(x) = \sqrt{x-1}$  en  $x = 3$
  
2. Calculeu, mitjançant la definició de derivada, la derivada de les funcions anteriors.
  
3. Calculeu les següents derivades:

1) $f(x) = 5$	2) $f(x) = -2x$	3) $f(x) = -2x + 2$
4) $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$	5) $f(x) = -2x^2 - 5$	6) $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$
7) $f(x) = \frac{x^3+2}{2}$	8) $f(x) = \frac{1}{3x^2}$	9) $f(x) = (5x^2 - 3)(x^2 + x + 4)$
10) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$	11) $f(x) = \frac{3x^3+x+2}{5x^2+1}$	12) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 3x)$
13) $f(x) = \frac{5}{x^5}$	14) $f(x) = \frac{5}{x^5} + \frac{3}{x^2}$	15) $f(x) = (x^2 + 3x - 2)^4$
16) $f(x) = \sqrt{x}$	17) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	18) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$
19) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$	20) $f(x) = \frac{3(x^2+2)^3}{5}$	21) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$
22) $f(x) = \sqrt[4]{x^5 - x^3 - 2}$	23) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$	24) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$
25) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$	26) $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$	27) $f(x) = e^{3-x^2}$
28) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	29) $f(x) = 3^{2x^2} \cdot \sqrt{x}$	30) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$
31) $f(x) = 2^{x^2-1}$	32) $f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}$	33) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
34) $f(x) = x^3 \cdot e^{-3x}$	35) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$	36) $f(x) = \ln(2x^4 - x^3 - 3x)$
37) $f(x) = \ln\left(\frac{e+1}{e-1}\right)$	38) $f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	39) $f(x) = \ln\sqrt{x(1-x)}$

40) $f(x) = \ln^3 \sqrt{\frac{3x}{x+2}}$	41) $f(x) = \log_2(x^4 - 3x)$	42) $f(x) = \sqrt[3]{\log_4 3x}$
43) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	44) $f(x) = x^5 \cdot \ln x$	45) $f(x) = (\ln 3x)^5$
46) $f(x) = \ln \frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$	47) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$	48) $f(x) = \cos(7 - 2x)$
49) $f(x) = 3 \operatorname{tg} 2x$	50) $f(x) = \sec(5x + 2)$	51) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
52) $f(x) = \sin^3 3x$	53) $f(x) = \operatorname{cotg}(3 - 2x)$	54) $f(x) = \cos \frac{x+1}{x-1}$
55) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$	56) $f(x) = \sin x^4$	57) $f(x) = \sin^4 x$
58) $f(x) = \frac{\cos x}{5}$	59) $f(x) = \frac{1}{2} \cos^2 5x$	60) $f(x) = \cos(3x^2 + x - 1)$
61) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$	62) $f(x) = \operatorname{cotg} 4x^2$	63) $f(x) = \operatorname{cotg}^2 4x$
64) $f(x) = \arcsin \sqrt{x^2 - 4}$	65) $f(x) = \arccos e^x$	66) $f(x) = \arctg \sqrt{x}$
67) $f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x}$	68) $f(x) = \arctg 3x^2$	69) $f(x) = \arcsin(2x - 3)$
70) $f(x) = \arccos x^2$	71) $f(x) = \ln \sin x$	72) $f(x) = \ln \cos 2x$
73) $f(x) = \ln \operatorname{tg}(1 - x)$	74) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$	75) $f(x) = \sin \sqrt{\ln(1 - 3x)}$
76) $f(x) = \operatorname{tg}(\sin \sqrt{5x})$	77) $f(x) = \sin^2(\cos 2x)$	78) $f(x) = \cos 3^x$

4. Calculeu les següents derivades:

1) $f(x) = (x^3 + 3x - 2)^{(5x-7)}$	2) $f(x) = (\ln x)^{\sqrt{x}}$	3) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
4) $f(x) = x^2 \sqrt{\arccos x}$	5) $f(x) = x^{\arctg x}$	6) $f(x) = (\arcsin x)^{\ln x}$

5. Calculeu la derivada n-ésima de les següents funcions:

1) $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x - 5$	2) $f(x) = \frac{1}{2-x}$	3) $f(x) = \sin x$
4) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$	5) $f(x) = \ln x$	6) $f(x) = e^{-3x}$

6. Calculeu la derivada implícita de les següents funcions:

1) $6x - 2y = 0$	2) $x^2 + y^2 - 7 = 0$
3) $x^2y - xy^2 + y^2 = 7$	4) $x^2 \sin(x + y) - 5ye^x = 3$

7. Trobeu el punt en que la funció  $f(x) = |x + 2|$  no te derivada. Justifiqueu el resultat representant la seva gràfica.

8. Trobeu els punts en que la funció  $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$  no te derivada. Justifiqueu el resultat representant la seva gràfica.

9. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + 2 & x < 0 \\ \frac{2x}{\pi} + 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x + 1 & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

10. Donada la funció:  $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x < 1 \end{cases}$  digues per a quins valors és derivable.

11. Estudieu per a quins valors de  $a$  i  $b$  la funció és derivable:  $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

12. Estudieu per a quins valors de  $a$  i  $b$  la funció és derivable:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & x \leq -1 \\ \frac{a}{x} & -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & x > 1 \end{cases}$$

13. Sigui la paràbola  $y = 2x^2 + x + 1$ , i sigui el punt de la paràbola d'abscissa 0:

- 1) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A.
- 2) En quin punt de la paràbola, la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?

14. Calculeu el punt de la corba  $y = 2 + x - x^2$  en que la tangent és paral·lela a la recta  $y = x$ .

15. Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt  $P(1, -1)$  i que són tangents a la corba d'equació  $y = (x - 1)^2$ .

16. Trobeu els valors dels coeficients  $b$ ,  $c$  i  $d$  per tal que la gràfica de la funció  $y = x^3 + bx^2 + cx + d$  talli a l'eix OY en el punt  $(0, -1)$  i passi pel punt  $(2,3)$  i en aquest punt tingui tangent paral·lela a l'eix OX.
17. Sigui la funció  $f(x) = xe^x$ . Calculeu l'equació de la tangent en l'origen de coordenades.
18. Sigui la funció  $f(x) = e^x \sin x$ . Determineu l'equació de les rectes tangents a la gràfica en  $x = 0$  i en  $x = \pi$ .
19. Determineu la recta tangent a  $f(x) = x \sin x$  en  $x = \pi$ .
20. Trobeu el punt de la corba  $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$  en el que el pendent de la recta tangent és 8.
21. Trobeu el punt sobre la corba  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$  on la recta tangent és paral·lela a l'eix OX. Indiqueu totes les possibles solucions.
22. Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba  $f(x) = x^3$  que forma un angle de  $45^\circ$  amb l'eix OX.
23. Determineu el valor del paràmetre  $b$ , tal que les tangents a la corba de la funció  $f(x) = b^2x^3 + bx^2 + 3x + 9$  en els punts d'abscissa  $x = 1$  i  $x = 2$  siguin paral·leles.
24. La gràfica de la funció  $y = ax^2 + bx + c$  passa pels punts  $P(2,3)$  i  $Q(3,13)$ , i la tangent a la corba en el punt d'abscissa  $x = 1$  és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant. Determineu el valor de  $a$ ,  $b$  i  $c$ .
25. Donada la funció  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , determineu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  sabent que la corba passa pels punts  $P(-1,2)$  i  $Q(2,3)$ , i que les tangents a la corba en els punts d'abscissa  $1$  i  $-2$  són paral·leles a l'eix OX.