

1. NOMBRES ENTERS

$Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, \dots \}$. Es representen en una recta

Operacions

a) Suma i resta

- agrupem els nombres positius per una banda i els negatius per altre;
- sumem cada grup de nombres;
- restem els resultats obtinguts i posem el signe del més gran

$$\begin{aligned}\text{Ex: } 3 - 5 - 8 + 9 - 1 &= \\ &= 3 + 9 - 5 - 8 - 1 = \\ &= 12 - 14 = \\ &= -2\end{aligned}$$

b) Producte i divisió

- es multipliquen o es dividiexen els nombres
- el resultat és: + si els nombres tenen el mateix signe, i - si tenen diferent signe

$$\begin{aligned}\text{Ex : } (-2) \cdot (-3) &= +6 \\ 6 : (-2) &= -3\end{aligned}$$

OJO: Això només és cert quan es treballa en grups de nombres de dos en dos.

$$\text{Ex: } (-2) \cdot (-4) \cdot (-3) = -24$$

Propietat distributiva : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ex :

$$\begin{aligned}4 \cdot (5 + 3) &= 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 8 &= 20 + 12 \\ 32 &= 32\end{aligned}$$

donem prioritats
al parèntesi

apliquem la propietat
distributiva i repartim
el producte abans de sumar

Treure factor comú: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

Consisteix en aplicar a l'inrevès la propietat distributiva. Tal i com el seu nom indica

treure farem fora

factor un(s) nombre(s) que està(n) multiplicant i

comú que es troba a tots els termes de la suma o resta

$$\text{Ex }_1: 2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 - 2 \cdot 8 = 2 \cdot (5 + 12 - 8)$$

$$\text{Ex }_2: 4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 = 4 \cdot (6 - 3 + 1)$$

ÒJÓ: Quan en un terme sembla no quedar res hem de posar un 1 ja que, per exemple,
 $3 = 3 \cdot 1$. En el exemple anterior: $4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 =$
 $4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 =$
 $4 \cdot (6 - 3 + 1)$

Prioritat d'operacions

1er. Fem potències i arrels

2on fem les multiplicacions i divisions

3r fem les sumes i restes

$$\begin{aligned} \text{Ex : } & 3 + 4 \cdot 2 - 8 : 2 = \\ & = 3 + 8 - 4 = \\ & = 11 - 4 = 7 \end{aligned}$$

En el cas d'haver parèntesi: fem les operacions de dins del parèntesi fent servir l'ordre d'abans fins tenir un resultat i després les operacions que resten.

ÒJÓ: quan davant d'un parèntesi no hi ha cap signe de suma, resta, producte, o divisió, es multiplica el resultat obtingut pel nombre que hi ha justament abans.

$$\begin{aligned} \text{Ex : } & 2(5 + 3 \cdot 4) - 5 - 4 : 2 = \\ & = 2(5 + 12) - 5 - 4 : 2 = \\ & = 2(17) - 5 - 4 : 2 = \\ & = 34 - 5 - 2 = 27 \end{aligned}$$

Podem trobar-nos amb que dins d'un parèntesi tenim un altre, a les hores la resolució es fa de dins a fora, es a dir, primer es resol el parèntesi més interior.

$$\begin{aligned} \text{Ex : } & 2(4 + 5(6 : 3 + 4 - 3) - 1) = \\ & = 2(4 + 5(2 + 4 - 3) - 1) = \\ & = 2(4 + 5 \cdot 3 - 1) = \\ & = 2(4 + 15 - 1) = \\ & = 2 \cdot 18 = 36 \end{aligned}$$

2. NOMBRES RACIONALS

L'expressió $\frac{a}{b}$ s'anomena fracció. A a numerador, i a b denominador.

Representació gràfica

Per representar gràficament una fracció en una recta,

- dividim cada unitat en tantes parts iguals com indica el denominador, començant del 0 a la dreta si el nombre és positiu, i del 0 cap a l'esquerra en el cas de nombre negatiu.
- començant des de 0 agafem tantes parts com indica el numerador.

Fraccions equivalents. Representen la mateixa quantitat. Per saber si dues fraccions són equivalents:

- fem la divisió entre numerador i denominador, i si dona el mateix valor són equivalents;
- multipliquem el numerador d'una fracció pel denominador de l'altre, i al revès. Si són equivalents donarà el mateix resultat.

$$\begin{array}{lll} \text{Ex: } 5/4 \text{ i } 20/16 & 5:4 = 1,2 & 5 \cdot 16 = 80 \\ & 20:16 = 1,2 & 20 \cdot 4 = 80 \quad \text{Si} \end{array}$$

Per obtenir fraccions equivalents a una donada, multipliquem o dividim, numerador i denominador, pel mateix nombre.

Ex:

$$\frac{12}{20} \rightarrow \frac{3}{5} (\div 4) \qquad \frac{12}{20} \rightarrow \frac{36}{60} (\cdot 3)$$

Operacions

a) Suma i resta.

- Posem com a nou denominador el m.c.m dels denominadors.
- Multipliquem els numeradors pel resultat de la divisió: numerador nou / numerador vell
- Sumem i/o restem els numeradors mantenint el denominador.

Ex:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 20:4 & 20:1 & 20:5 & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \frac{3}{4} + 2 - \frac{1}{5} & = & \frac{3 \cdot 5}{20} + \frac{2 \cdot 20}{20} - \frac{1 \cdot 4}{20} & = & \frac{15}{20} + \frac{40}{20} - \frac{4}{20} & = & \frac{51}{20} \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{m.c.m} = 2^2 \cdot 5 = 20 & & & & \end{array}$$

b) Producte: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ Ex: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$

c) Divisió: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ Ex: $\frac{3}{2} : \frac{9}{6} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 9} = \frac{18}{18}$

Simplificació de fraccions

a) Dividim numerador i denominador per divisors comuns.

Ex: $\frac{240}{128} \stackrel{:4}{=} \frac{60}{32} \stackrel{:2}{=} \frac{30}{16} \stackrel{:2}{=} \frac{15}{8}$

b) Descomposem factorialment numerador i denominador, eliminant els factors que es repeteixen a dalt i a baix.

Ex: $\frac{3246}{5184} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 67}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{67}{108}$

La fracció obtinguda no es pot simplificar més, s'anomena fracció irreductible.

3. POTÈNCIES

Potències. Consisteix en multiplicar factors iguals: $a^b = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$

“b” vegades

on a – base i b – exponent. Ex: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Propietats:

1. $a^1 = a$ Ex: $5^1 = 5$

2. $a^0 = 1$ Ex: $(-2)^0 = 1$

3. Operacions.

En general, per fer operacions amb potències, es calculen aquestes i es fan les operacions indicades.

Ex: $3^2 + 5^2 - 2^3 = 9 + 25 - 8 = 26$

Ex: $2^5 \cdot 5^3 = 32 \cdot 125$

Hi han casos especials on es poden fer alguns passos que simplifiquen la feina, es tracta de **producte i divisió de potències amb la mateixa base**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{Ex: } 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad \text{Ex: } 2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$$

3. Potència d'un producte o d'una divisió:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Ex:

$$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$$

$$12^2 = 9 \cdot 16$$

$$144 = 144$$

$$(36:4)^2 = 36^2 : 4^2$$

$$9^2 = 1296 : 16$$

$$81 = 81$$

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ Ex: $(2^3)^2 = 2^6$

6. $a^{-m} = 1 / a^m$ Ex: $2^{-3} = 1 / 2^3$

Notació científica

Consisteix en fer servir potències de 10 per expressar quantitats molt grans o molt petites.

Observacions

a)

$10^{\text{n}^\circ \text{positiu}}$ unitat seguida de tants zeros com indica el nombre

Ex:

$$10^3 = 1000$$

$$10^{12} = 1000\ 000\ 000\ 000$$

$10^{\text{n}^\circ \text{negatiu}}$ pensem en les propietats de les potències

Ex :

$$10^{-2} = 1 / 10^2 = 1 / 100 = 0,01$$

$$10^{-15} = 1 / 10^{15} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 001$$

b)

$$3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10\ 000 = 30\ 000$$

$$2,5 \cdot 10^{12} = 2\ 500\ 000\ 000\ 000$$

$$4 \cdot 10^{-2} = 0,04$$

$$3,5 \cdot 10^{-1} = 0,35$$

c) Un nombre es pot expressar de moltes formes

$$2,38 \cdot 10^{12} = 23,8 \cdot 10^{11} = 0,238 \cdot 10^{13}$$

d) Operacions

- Sumes i restes

Expressem totes les quantitats amb una mateixa potència

Treiem factor comú

Sumem i/o restem

Ex :

$$\begin{aligned} & 3,4 \cdot 10^{15} - 2 \cdot 10^{14} = \\ & = 3,4 \cdot 10^{15} - 0,2 \cdot 10^{15} = \\ & = (3,4 - 0,2) \cdot 10^{15} = \\ & = 3,2 \cdot 10^{15} \end{aligned}$$

- Producte i divisió

Ex :

$$\begin{aligned} & 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^3 = \\ & = 2,5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 = \\ & = 12,5 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

4. ARRELS

Arrel. És l'operació inversa d'elevant a una potència

$$\sqrt[n]{a} = b \quad b^n = a \quad \begin{array}{l} a = \text{radicand} \\ n = \text{índex} \end{array}$$

Ex:

$$\sqrt{81} = \pm 9 \quad \text{ja que } 9^2 = 81 \\ (-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3 \quad \text{ja que } 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \\ (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \quad \text{ja que } (-2)^5 = -32$$

Propietats:

1. Signe de l'arrel

Index	Nº parell	Nº senar
Radicand		
Positiu	\pm	+
Negatiu	no existeix	-

2. Operacions

a) Suma i resta. Primer hem de calcular l'arrel i després fer l'operació.

$$\text{Ex: } \sqrt{64} + \sqrt{4} - \sqrt{100} = 8 + 2 - 10 = 0$$

b) Producte i divisió.

En general, primer farem l'arrel i després el producte o la divisió.

Ex:

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{-64} = 3 \cdot (-4) = -12$$

Si les arrels que es multipliquen o es divideixen tenen el mateix índex, podem primer multiplicar o dividir, i després fer l'arrel

$$\text{Ex: } \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4}$$

$$5 \cdot 2 = \sqrt{100}$$

$$10 = 10$$

c) Potència d'una arrel $(\sqrt[n]{a})^b = \sqrt[n]{a^b}$. Ex: $(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3}$
 $2^3 = \sqrt{64}$
 $8 = 8$

d) Arrel d'una arrel $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$. Ex: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \pm 2$

3. $\sqrt[n]{a^n} = a$. Ex: $\sqrt{4^2} = 4$

4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Ex: $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$

Càlcul d'arrels. A part de les més immediates com $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{-8}$, etc. podem calcular arrels de nombres grans.

- Factoritzem el radicand;
- Expressem els exponents com a suma de tants índexs com sigui possible;
- Separem l'arrel com a producte d'arrels
- Simplifiquem

Ex:

$$\begin{aligned}\sqrt{576} &= \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^{2+2+2} \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24\end{aligned}$$

Ex:

$$\sqrt[3]{-192} = -\sqrt[3]{2^6 \cdot 3} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} = -4 \cdot \sqrt[3]{3}$$

Racionalització

Consisteix en trobar una fracció equivalent a la donada però sense arrels al denominador.

- Si no hi ha sumes o restes al denominador, multipliquem numerador i denominador per l'arrel convenient

Ex:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^3} \cdot \sqrt[5]{4^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{4}$$

- Si hi ha suma o resta al denominador, multipliquem numerador i denominador pel conjugat

Ex:

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$