

Tema 3: POLINOMIS

Polinomi

Anomenem polinomi en "x" de grau "n" a una expressió del tipus

$$P_{(x)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

on

$n \in \mathbb{N}$ (nombre natural)

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ són coeficients reals

a_n terme independent

• Classificació

a) nombre de termes

- Monomi (un terme). Ex: $P_{(x)} = x^2$

- Binomi (dos termes). Ex: $Q_{(x)} = x^5 + 7x^3$

- Polinomi (tres o més termes). Ex : $R_{(x)} = x^2 + x^3 - 3x$

b) grau d'un polinomi. Correspon amb el major grau que presenta la x

Ex:

$$P_{(x)} = x^2 + 3x - 4 \quad \text{grau 2}$$

$$R_{(x)} = 3 \quad \text{grau 0}$$

$$Q_{(x)} = x^5 + 7x^3 - 2 \quad \text{grau 5}$$

• Valor numèric d'un polinomi, és el nombre que s'obté en substituir la x pel nombre indicat

Ex: valor numèric de $P_{(x)} = x^2 + 3x - 4$ per $x = 2$

$$P_{(2)} = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$$

$$P_{(2)} = 6$$

Binomi de Newton

Ens permet desenvolupar la potència del binomi $(a + b)^n$

Si desenvolupem les potències de (a+b)

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

observem que els coeficients surten de la seqüència

		1		1	
			1	2	1
		1	3	3	1
	1	4	6	4	1

Aquest és el triangle de Tartaglia. Cadascun d'aquests nombres correspon al valor d'un nombre combinatori

		$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$	
		$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$
		$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$
	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

on

$$\binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}$$

Ex:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Per escriure la potència d'un binomi utilitzem el Binomi de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^h$$

Operacions amb polinomis

a) Suma.

- Agrupem termes
- Sumem els termes del mateix grau. Per aixó posem els polinomis un sobre l'altre fent coincidir en columnes els termes semblants

Ex:

$$P_{(x)} = 3x^4 - 5x^2 + 7x$$
$$Q_{(x)} = x^3 + x^2 - 11x + 3$$

$$P_{(x)} + Q_{(x)} : \begin{array}{r} 3x^4 \quad - 5x^2 + 7x \\ x^3 + x^2 - 11x + 3 \\ \hline 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

b) Resta

- per calcular $P_{(x)} - Q_{(x)}$ sumem a $P_{(x)}$ l'oposat de $Q_{(x)}$ (els termes del polinomi canviats de signe)

Ex:

$$P_{(x)} = 3x^4 - 5x^2 + 7x$$
$$Q_{(x)} = x^3 + 3x^2 - x + 3$$

$$P_{(x)} - Q_{(x)} : \begin{array}{r} P_{(x)} \quad 3x^4 \quad - 5x^2 + 7x \\ - Q_{(x)} \quad -x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ \hline 3x^4 - x^3 - 8x^2 + 8x + 3 \end{array}$$

c) Producte

- es multiplica terme a terme i s'agrupen els resultats del mateix grau

Ex:

$$P_{(x)} = 5x + 11$$
$$Q_{(x)} = x^3 + 2x^2 + 4$$

$$P_{(x)} \cdot Q_{(x)} = (5x + 11)(x^3 + 2x^2 + 4)$$
$$P_{(x)} \cdot Q_{(x)} = 5x^4 + 10x^3 + 20x + 11x^3 + 22x^2 + 44$$
$$P_{(x)} \cdot Q_{(x)} = 5x^4 + 21x^3 + 22x^2 + 20x + 44$$

d) Divisió

En dividir $P_{(x)} : Q_{(x)}$ s'obté un quocient $C_{(x)}$ i un residu $R_{(x)}$ de forma que

$$P_{(x)} = Q_{(x)} \cdot C_{(x)} + R_{(x)}$$

Ex:

$$P_{(x)} = 5x^3 + 7x^2 - 3$$
$$Q_{(x)} = x^2 + 2x - 1$$

$P(x) : Q(x)$

$$\begin{array}{r}
 5x^3 + 7x^2 + 0x - 3 \quad | \quad x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{-5x^3 - 10x^2 + 5x} \quad | \quad 5x - 3 \\
 -3x^2 + 5x - 3 \\
 \underline{+3x^2 + 6x - 3} \\
 11x - 6
 \end{array}$$

- Regla de Ruffini. S'aplica quan el divisor és $(x \pm a)$.

Ex: $(x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12) : (x - 1)$

Es copien en la part superior d'un requadre els coeficients del dividend de forma ordenada posant 0 en aquells casos en els que no hi ha terme

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
 \hline
 & & & & &
 \end{array}$$

i es posa la a canviada de signe a l'altre banda, en aquest cas 1

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
 1 & \hline
 & & & & &
 \end{array}$$

el primer coeficient es copia a sota

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
 1 & \hline
 & 1 & & & &
 \end{array}$$

es multiplica el coeficient sota la línia per la a canviada de signe i el resultat es col·loca sota el segon coeficient ($1 \times 1 = 1$)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
 1 & \hline
 & 1 & 1 & & &
 \end{array}$$

ara es sumen els nombres en columna i es posa el resultat a sota ($-4 + 1 = -3$)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & & 1 & & & \\ \hline & 1 & -3 & & & \end{array}$$

es repeteix el procediment ($1 \times (-3) = -3$)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & & 1 & -3 & & \\ \hline & 1 & -3 & & & \end{array}$$

i es suma

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & & 1 & -3 & & \\ \hline & 1 & -3 & -4 & & \end{array}$$

si continuem queda

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & & 1 & -3 & -4 & 12 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 12 & 0 \end{array}$$

l'últim nombre que separem de la resta és el residu (en aquest cas la divisió és exacte perquè dona 0), i la resta de nombres són els coeficients del resultat

$$1x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

Observem que el resultat sempre és un grau inferior al dividend

Teorema del residu

El residu d'una divisió d'un polinomi $P(x)$ per un binomi $(x \pm a)$ és el valor numèric del polinomi per $x = \mu a$

Ex: El residu de la divisió

$$3x^4 - 5x^2 + 3x - 20 : (x - 2)$$

és $P_{(2)} = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 20 = 14$

Descomposició factorial d'un polinomi

Diem que a és arrel d'un polinomi $P(x)$ si $P(a) = 0$.

En aplicar el teorema del residu, si a és una arrel del polinomi $P(x)$ és que $P(x)$ és divisible per $x-a$, en fer la divisió s'obindrà un cocient $C(x)$ tal que

$$P(x) = C(x) \cdot (x - a)$$

Si continuem el procediment i busquem arrels per $C(x)$ arribem a

$$P_{(x)} = a_0 (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$$

on x_1, x_2, \dots són arrels del polinomi

- Per descomposar factorialment s'aplica la regla de Ruffini, on es prova com arrels els divisors del terme independent

Ex:

$$P_{(x)} = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$$

Per començar provarem amb 1 que és divisor de 12

$$P_{(1)} = 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 12 = -4$$

com dona diferent de 0 $P(x)$ no és divisible per $(x - 1)$

Per -1

$$P_{(-1)} = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 12 = 0$$

que resulta ser arrel, fem la divisió per Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -6 & 9 & 4 & -12 \\ -1 & & -1 & 7 & -16 & 12 \\ \hline & 1 & -7 & 16 & -12 & 0 \end{array}$$

$$P_{(x)} = (x + 1)(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$$

$$C_{(x)} = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$

$$C_{(-1)} = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 16(-1) - 12 = -36 \quad \text{no}$$

$$C_{(2)} = (2)^3 - 7(2)^2 + 16(2) - 12 = 0 \quad \text{si}$$

per la regla de Ruffini, dividim $C(x)$ per $x + 2$ i obtenim $x^2 - 5x + 6$

$$P_{(x)} = (x + 1)(x - 2)(x^2 - 5x + 6)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 $C(x)$

Ara per descomposar el resultat obtingut podem fer Ruffini o l'equació de segon grau

$$x^2 - 5x + 6$$

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$P_{(x)} = (x + 1)(x - 2)(x - 2)(x - 3)$$

• Aplicacions:

- Resolució d'equacions amb una incògnita
- Simplificació de fraccions algebraïques

a) Resolució d'equacions amb una incògnita.

- Treiem factor comú
- Descomposem factorialment
- Igualem a 0 cada factor, algunes de les solucions són les arrels

Ex:

$$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x = 0$$

$$x(x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24) = 0$$

	1	6	3	-26	-24
2		2	16	38	24
	1	8	19	12	0
-3		-3	-15	-12	
	1	5	4		0

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -4$$

$$\begin{aligned}
x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x &= 0 \\
x(x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24) &= 0 \\
x(x-2)(x^3 + 8x^2 + 19x + 12) &= 0 \\
x(x-2)(x+3)(x^2 + 5x + 4) &= 0 \\
x(x-2)(x+3)(x+1)(x+4) &= 0
\end{aligned}$$

Solucions: 0, 2, -3, -1 i -4

b) Simplificació de fraccions algebraïques

- descomposem factorialment numerador i denominador
- “eliminem” els factors que es repeteixen

Ex:

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12}{x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x} &= \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}(x-2)(x-3)}{x\cancel{(x-2)}(x+3)\cancel{(x+1)}(x+4)} = \\
&= \frac{(x-2)(x-3)}{x(x+3)(x+4)}
\end{aligned}$$