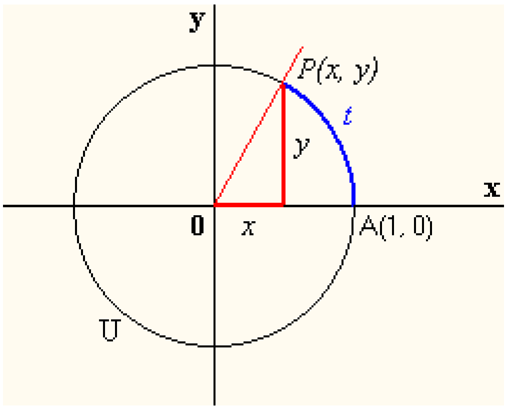
Tema 1: TRIGONOMETRIA

Raons trigonomètriques d'un angle



- sinus (projecció sobre l'eix y)	$\sin\alpha$	$\sin\alpha \in [-1, 1]$
- cosinus (projecció sobre l'eix x)	$\cos\alpha$	$\cos\alpha \in [-1, 1]$
- tangent	$\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$	$\tan\alpha \in [-\infty, +\infty]$
- secant	$\sec\alpha = 1 / \cos\alpha$	
- cosecant	$\text{cosec}\,\alpha = 1 / \sin\alpha$	
- cotangent	$\text{cotan}\,\alpha = 1 / \tan\alpha$	

• Observacions :

1. Els angles es mesuren en graus i radians (360º = 2π radians)
2. Cada angle entre 0º i 360º defineix un punt exclusiu P sobre la circumferència en ser representat, es a dir, té un parell de valors que corresponen al sinus i cosinus que l'identifiquen
3. A un determinat valor de sinus o cosinus sempre corresponen dos angles entre 0º i 360º

Ex: Si observem la taula veiem que els angles de 60º i 120 º tenen el mateix valor del sinus però que la parella de valors sinus = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ / cosinus = $\frac{1}{2}$ és exclusiva de l'angle de 60º

	30º	45º	60º	120º
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

4. A partir de les raons trigonomètriques dels angles del primer quadrant es pot deduïr les d'angles d'altres quadrants

5. Signe de les raons trigonomètriques segons el quadrant

	1r	2n	3r	4t
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

(Exercicis 1 i 2)

<u>Relacions entre raons trigonomètriques</u>

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ *(a partir d'aquesta i amb la definició de tangent es poden resoldre tots els exercicis)*

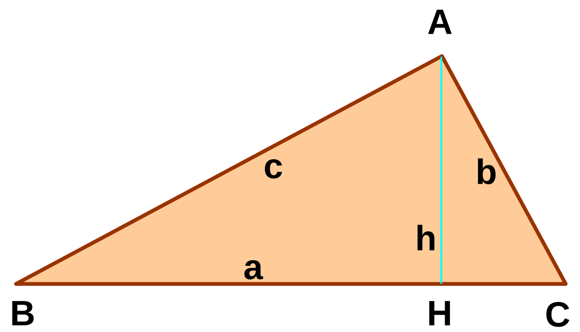
$\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{tg^2 \alpha + 1}$ $tg^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$

$\sin^2 \alpha = tg^2 \alpha / (tg^2 \alpha + 1)$ $cotg^2 \alpha = cosec^2 \alpha - 1$

(Exercicis 3 i 4)

<u>Resolució de triangles</u>

a) Triangles rectangles



A = 90º a - hipotenusa

$\sin \alpha$= catet oposat / hipotenusa $\sin B = \dfrac{b}{a}$

$\cos \alpha$= catet contínu / hipotenusa $\cos B = \dfrac{c}{a}$

$\tan \alpha$= catet oposat / catet continu $\tan B = \dfrac{b}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2$

(Exercici 5)

b) Triangles no rectangles

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ *Teorema del sinus*

$a^2 = b^2+c^2-2.b.c.\cos\hat{A}$
$b^2 = a^2+c^2-2.a.c.\cos B$ *Teorema del cosinus*
$c^2 = a^2+b^2-2.a.b.\cos C$

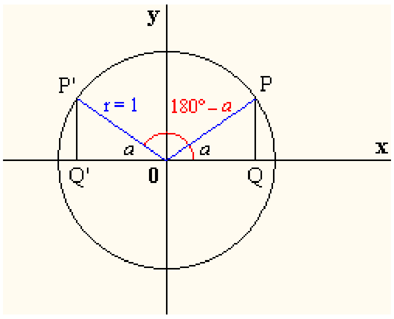
(Exercicis 6 i 7)

Equacions trigonomètriques
Es tracta d'equacions on la incógnita forma part d'una raó trigonomètrica
Cal modificar l'expressió fins tenir tot en funció d'una sola raó fent servir les fórmules.

(Exercicis 8 i 9)

Exercicis

Exercici 1: Raons trigonomètriques de 150º?



Per el dibuix veiem que l'angle de 150º (que defineix P') està relacionat amb el de 30º (P) de manera que

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercici 2: Quin angle α té com a $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si $\tan \alpha < 0$?

Sabem que el sinus de 45º és $\frac{\sqrt{2}}{2}$*, però en tractar-se d'un angle del primer quadrant la tangent és positiva. Hi ha un altre angle amb el mateix valor del sinus: el de 135º i com està al segon quadrant la seva tangent és negativa.*

Exercici 3: Sigui un angle $\alpha \in [\ \pi , 3\pi/2\ ]$ amb $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$. Trobeu la resta de raons trigonomètriques.

Com $\pi = 180^\circ$ *podem deduir que* $3\pi/2$ *és 270º i que l'angle* α *és del tercer quadrant, per la qual cosa tindrà sinus negatiu i tangent positiva*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{16} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16}$$

$$sin\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

però com pertany al tercer quadrant $sin\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$tan\ \alpha = sin\ \alpha / cos\ \alpha$	$tan\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} : (-\frac{3}{4}) = \frac{\sqrt{7}}{3}$
$sec\ \alpha = 1 / cos\ \alpha$	$sec\ \alpha = 1 : (-\frac{3}{4}) = -\frac{4}{3}$
$cosec\ \alpha = 1 / sin\ \alpha$	$cosec\ \alpha = 1 : -\frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{4}{\sqrt{7}}$
$cotan\ \alpha = 1 / tan\ \alpha$	$cotan\ \alpha = 1 : \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

Exercici 4: Si tan β = -2 i 3π/2 < β < 2π trobar la resta de raons trigonomètriques. De quin angle es tracta ?

Podem aplicar directament les fórmules :

$$cos^2\ \alpha = \frac{1}{tg^2\ \alpha + 1}$$

$$sin^2\ \alpha = tg^2\ \alpha / (\ tg^2\ \alpha + 1\ )$$

i des d'aquí trobar

el $cos^2\ \alpha = \frac{1}{(-2)^2+1} = \frac{1}{5}$ $\qquad cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ *(perquè pertany al quart quadrant)*

el sinus $sin^2\ \alpha = \frac{(-2)^2}{(-2)^2+1} = \frac{4}{5}$ $\qquad sin\ \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ *(perquè pertany al quart quadrant)*

i la resta de raons trigonomètriques

O be fer un sistema d'equacions amb dues incógnites:

$$\left.\begin{array}{l} sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ tan\ \alpha = sin\ \alpha / cos\ \alpha \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ -2 = sin\ \alpha / cos\ \alpha \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ -2 \cdot cos\ \alpha = sin\ \alpha \end{array}\right\}$$

$$(-2 \cdot cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1$$
$$4 \cdot cos^2 \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

$5\ \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ *(quart quadrant)*

$-2 \cdot \cos\ \alpha = \sin\ \alpha$

$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \sin\ \alpha$

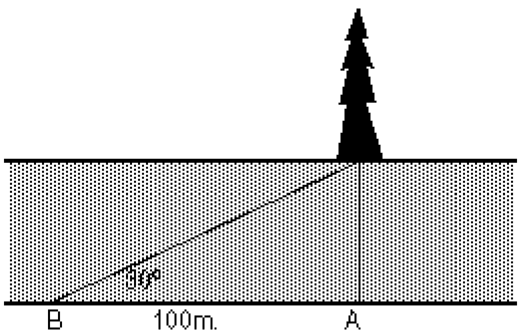
$\sin\ \alpha = -\ \frac{2}{\sqrt{5}}$

En relació a l'angle observem que el valor tan $\beta = 2$ no correspon a cap dels angles de 30º, 45º o 60º i farem servir la calculadora per conèixer quin angle té aquest valor de tangent. La calculadora dona com a resultat – 63,43º

arctan -2 = – 63,43º

es a dir a un angle de 423,43 º (– 63,43º + 360º).

Exercici 5: Des de un punt A en la vorera d'un riu es veu un arbre. Si camines 100 metres per aquesta vora arribes a un punt B des de el que es veu l'arbre sota un angle de 30º (tal com indica la figura). Calcula l'amplada del riu.

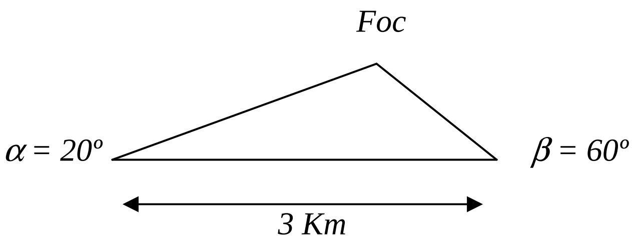


Observem que d'aquest triangle rectangle em demanen el catet oposat a l'angle B (que podem anomenar x) i ens donen la longitud del catet continu. La tangent és la que hem relaciona catet oposat i continu,

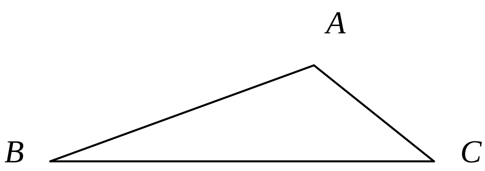
$\tan 30º = \frac{x}{100}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{100}$ $\qquad$ $1 \cdot 100 = x \cdot \sqrt{3}$ $\qquad$ $x = \frac{100}{\sqrt{3}}\, m$

Exercici 6: Dos estacions de guardaboscos estan separades 3 Km en línia recta. Dos guardaboscos, un a cada estació, observen el fum d'un incendi. Els angles d'observació de l'incendi són de 20º i 60º, l'angle es mesura en relació a la recta que uneix les estacions. Aproximadament, a quina distància de cada guardaboscos es troba l'incendi?



Podem deduir que l'angle que falta és 100º.



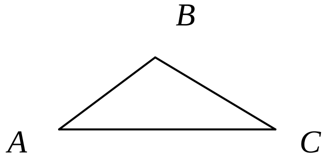
Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 20^{\circ}} = \frac{3}{\sin 100^{\circ}} \qquad \overline{AC} = \frac{3 \sin 20^{\circ}}{\sin 100^{\circ}} = 1{,}042 \text{ Km}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60^{\circ}} = \frac{3}{\sin 100^{\circ}} \qquad \overline{AC} = \frac{3 \sin 60^{\circ}}{\sin 100^{\circ}} = 2{,}638 \text{ Km}$$

Exercici 7: Trobeu els angles d'un triangle de costats 2, 4 i 5 cm



Suposem $\overline{AB} = 2$ *cm,* $\overline{BC} = 3$ *cm i* $\overline{AC} = 4$ *cm*

Apliquem el teorema del cosinus

$$\overline{AC}^{\,2} = \overline{AB}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2} - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos B$$

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos B$$

$$\frac{16 - 4 - 9}{-12} = \cos B \qquad B = \arccos \frac{3}{-12} = 104{,}478^{\circ}$$

Pel teorema del sinus podem conèixer altre angle

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 104{,}478º} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$$

$$\frac{4}{\sin 104{,}478º} = \frac{2}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{\sin 104{,}478º}{2}$$

$$\sin C = 0{,}484$$

$$C = 28{,}955º$$

Per trobar A

$$A = 180º - B - C = 46{,}567º$$

Exercici 8: Resoleu $\cos(x - \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Sabem que $\cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$*, però com busquem un angle amb valor de cosinus negatiu hem de pensar en el 2n i 3r quadrant. De forma semblant a l'exercici 1 podem deduir que*

$$\cos 135º = \cos 225º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

es a dir

$$\begin{array}{lll} x - \pi = 135º & x - 180º = 135º & x = 315º \\ x - \pi = 225º & x - 180º = 225º & x = 405º = 45º \end{array}$$

escriurem

$$x = \begin{cases} 315º + K \cdot 360º \\ 45º + k \cdot 360º \end{cases} \quad \text{on } K = 0, 1, 2, \ldots$$

Exercici 9: Resoleu $\sin^2 x - 1 = \cos x$

Com $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *tenim* $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$sin^2 x - 1 = cos x$
$(1 - cos^2 x) - 1 = cos x$
$- cos^2 x - cos x = 0$

podem fer un canvi de variable $t = cos x$

$-t^2 - t = 0$
$- t (t + 1) = 0$

d'on es pot deduir que

$t = 0$	*o*	$t + 1 = 0$ $t = - 1$
$cos x = 0$		$cos x = - 1$
$x = 90º$ *i* $270º$		$x = 180º$

$x = 180º, 90º, 270º + K \cdot 360º$ *on* $K = 0, 1, 2, ...$