Tema 2: POLINOMIS

Monomis, binomis i polinomis

Les expressions algebraiques es poden classificar, segon el nombre de termes,

monomis	format per un sol terme	$5xy^2$
binomis	format per dos termes	$\underbrace{3x}_{\text{terme}_1} - \underbrace{2yz}_{\text{terme}_2}$
polinomis	format per més de dos termes	$-2 + xy - 4x$

• A cada terme podem diferenciar:

- coeficient: el nombre
- part literal: les lletres amb els seus exponents

Ex:

$-3xy^4$ coeficient: -3 ; part literal: xy^4

• Valor numèric d'un polinomi, és el nombre que s'obté en substituir les variables de la part literal pels nombres indicats

Ex: valor numèric de $P(x) = x^2 + 3x - 4$ per $x = 2$

$$P(2) = 2^2 + 3.2 - 4$$
$$P(2) = 6$$

• El grau d'un terme, o monomi, és la suma dels exponents de les lletres que el formen.

Ex:

$2xy^3z^2 \quad \rightarrow \quad$ grau 6 (1 + 3 + 2)

El grau d'un polinomi és el grau més gran dels termes que el formen.

Ex:

$2xy - 3x^4y + x^3 \quad \rightarrow \quad$ grau 5

grau 2 grau 5 grau 3

• En general treballarem amb polinomis on la part literal està formada per una única variable. Així, nomenem polinomi en "x" de grau "n" a una expressió del tipus

$$P(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \dots + a_n$$

on

$n \in$ N (nombre natural)
$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ són coeficients reals
a_n terme independent

Un polinomi de grau n és complet si conté tots els monomis de grau més petit o igual que n, i és ordenat quan els monomis s'expressen de forma creixent o decreixent.
Ex:

$4x^4 - 2x + 3$ *Polinomi incomplet de grau 4 i ordenat de forma decreixent.*

Operacions amb polinomis

a) Suma
- Agrupem termes
- Sumem els termes del mateix grau. Per això posem els polinomis un sobre l'altre fent coincidir en columnes els termes semblants

Ex:

$P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x$
$Q(x) = x^3 + x^2 - 11x + 3$

$$\begin{array}{lrrrrr} & 3x^4 & & -5x^2 & +7x & \\ & & x^3 & +x^2 & -11x & +3 \\ \hline P(x)+Q(x): & 3x^4 & +x^3 & -4x^2 & -4x & +3 \end{array}$$

b) Resta
- per calcular P(x) – Q(x) sumem a P(x) l'oposat de Q(x) (els termes del polinomi canviats de signe)

Ex:

$P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x$
$Q(x) = x^3 + 3x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{lrrrrr} P(x) & 3x^4 & & -5x^2 & +7x & \\ -Q(x) & & -x^3 & -3x^2 & +x & -3 \\ \hline P(x)-Q(x): & 3x^4 & -x^3 & -8x^2 & +8x & -3 \end{array}$$

c) Producte

- es multiplica terme a terme i s'agrupen els resultats del mateix grau

Ex:

$P(x) = 5x + 11$
$Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4$

$P(x) \, . \, Q(x) = (5x + 11)\,(x^3 + 2x^2 + 4)$
$P(x) \, . \, Q(x) = 5x^4 + 10x^3 + 20x + 11x^3 + 22x^2 + 44$
$P(x) \, . \, Q(x) = 5x^4 + 21\,x^3 + 22x^2 + 20x + 44$

d) Divisió

En dividir P(x) : Q(x) s'obté un quocient C(x) i un residu R(x) de forma que
P(x) = Q(x) . C(x) + R(x)

Ex:

$P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 3$
$Q(x) = x^2 + 2x - 1$

P(x) : Q(x)

$$\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & +7x^2 & +0x & -3 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5}
-5x^3 & -10x^2 & +5x & & 5x-3 \\ \cline{1-4}
 & -3x^2 & +5x & -3 & \\
 & +3x^2 & +6x & -3 & \\ \cline{2-4}
 & & 11x & -6 &
\end{array}$$

(Observeu que si falta un terme en el dividend es posa 0 o es deixa un espai)

• **Regla de Ruffini**. S'aplica quan el divisor és (x ± a).

Ex: ($x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$) : (x – 1)
Es copien en la part superior d'un requadre els coeficients del dividend de forma ordenada posant 0 en aquells casos en els que no hi ha terme

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\
 & & & & & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}$$

i es posa la *a* canviada de signe a l'altre banda, en aquest cas 1

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

el primer coeficient es copia a sota

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

es multiplica el coeficient sota la línia per la *a* canviada de signe i el resultat es col·loca sota el segon coeficient (1 · 1 = 1)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & \xrightarrow{=} & 1 & & & \\ \hline \times & 1 & & & & \end{array}$$

ara es sumen els nombres en columna i es posa el resultat a sota (- 4 + 1 = - 3)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ & & + & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ \hline & 1 & -3 & & & \end{array}$$

es repeteix el procediment ((- 3) · 1 = -3)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ 1 & & 1 & -3 & & \\ \hline & 1 & -3 & & & \end{array}$$

i es suma

	1	- 4	-1	16	- 12
1		1	-3		
	1	- 3	-4		

i així successivament

	1	- 4	-1	16	- 12
1		1	-3	- 4	12
	1	- 3	-4	12	0

l'últim nombre que separem de la resta és el residu (en aquest cas la divisió és exacte perquè dona 0), i la resta de nombres són els coeficients del resultat:

$$1\,x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12$$

Nota: el resultat sempre és un grau inferior al dividend

e) Potències
Es desenvolupa com un producte reiterat si be hi ha casos especials, com els productes notables, on es pot aplicar una fórmula

Quadrat d'una suma	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Quadrat d'una resta	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma per diferència	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

• **Binomi de Newton**. Ens permet desenvolupar la potència del binomi $(a + b)^n$
Si desenvolupem les potències de (a+b)

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

observem que els coeficients surten de la seqüència

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Aquest és el triangle de Tartaglia. Cadascun d'aquests nombres correspon al valor d'un nombre combinatori

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

on

$$\binom{m}{n} = \frac{m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}$$

Ex:

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

Per escriure la potència d'un binomi utilitzem el Binomi de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^h$$

Nota: si *a* o *b* són negatius mantenim el signe en la fórmula

Teorema del residu
El residu d'una divisió d'un polinomi P(x) per un binomi (x $\pm$ a) és el valor numèric del polinomi per x = $\mp$ a (signe d' *a* canviat)

Ex: El residu de la divisió $3x^4 - 5x^2 + 3x - 20$: (x – 2)

és $P(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 20 = 14$

Arrel d'un polinomi
Diem que *a* és arrel d'un polinomi *P*(*x*) si *P(a)* = 0.

Ex: 1 és arrel de $P(x) = 3x - x^4 - 2$?

Si 1 és arrel de P(x) es complirà que P(1) = 0
$P(1) = 3 \cdot 1 - 1^4 + 2 = 3 - 1 - 2 = 0$ *Si*

També es podria comprovar fent la divisió P(x) : (x – 1) i veure si el residu és 0

	-1	0	0	3	-2
1		-1	-1	-1	2
	-1	-1	-1	2	0

Si

Nota:
a) Per trobar les arrels d'un polinomi podem substituir la variable pels divisors del últim terme
b) El nombre d'arrels diferents d'un polinomi és com a màxim igual al grau del polinomi.

Ex: Trobeu les arrels del polinomi $P(x) = x^2 - 5x + 6$

Substituïm x per tots els divisors del terme independent: ± 1, ± 2, ± 3 i ± 6

$P(x) = x^2 - 5x + 6$
$P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 \neq 0$ *1 no és arrel de P(x)*
$P(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 \neq 0$ *-1 no és arrel de P(x)*
$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$ *2 és arrel de P(x)*
$P(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 \neq 0$ *-2 no és arrel de P(x)*
$P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$ *3 és arrel de P(x)*

No és necessari continuar amb -3 i $\pm$ *6 ja que com és un polinomi de segon grau tindrà com a màxim dos arrels diferents.*

Arrels de P(x) són 2 i 3

• Si a és arrel de P(x) $\Rightarrow$ P(a) = 0 $\Rightarrow$ el residu de la divisió P(x) : (x – a) és 0 $\Rightarrow$ la divisió P(x) : (x – a) és exacte

P(x) és divisible per (x – a)
P(x) és múltiple de (x – a)
(x – a) és divisor de P(x)

Descomposició factorial d'un polinomi
En aplicar el teorema del residu, si a és una arrel del polinomi P(x) és que P(x) és divisible per x-a, en fer la divisió s'obtindrà un quocient C(x) tal que

$$P(x) = C(x) \cdot (x - a)$$

Si continuem el procediment i busquem arrels per C(x) arribem a

$$P_{(x)} = a_0\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.\,.\,.\,(x - x_n)$$

on x_1, x_2, … són arrels del polinomi, hem descomposat P(x)

• Per descomposar factorialment s'aplica la regla de Ruffini, on es prova com arrels els divisors del terme independent. Anteriorment, es treu factor comú si és possible.
Ex: Descomposeu factorialment $P(x) = 2x^5 - 12x^4 + 18x^3 + 8x^2 - 24x$

Primer traiem factor comú:

$$P(x) = 2x^5 - 12x^4 + 18x^3 + 8x^2 - 24x = 2x \cdot (x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12)$$

i ara apliquem el Teorema del residu amb els divisors de -12 per tal de poder descomposar $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$ per la regla de Ruffini.

Per començar provarem amb 1 que és divisor de 12

$$Q(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$$
$$Q(1) = 1^4 - 6.1^3 + 9.1^2 + 4.1 - 12 = -4$$

com dona diferent de 0, pel Teorema del residu, la divisió
$$(x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12) : (x - 1)$$
no donarà exacte. Q(x) no és divisible per (x – 1)

Per -1,

$$Q(-1) = (-1)^4 - 6.(-1)^3 + 9.(-1)^2 + 4.(-1) - 12 = 0$$

i, per tant, -1 és arrel del polinomi. Fem la divisió per Ruffini

	1	*-6*	*9*	*4*	*-12*
-1		*-1*	*7*	*-16*	*12*
	1	*-7*	*16*	*-12*	*0*

i deduïm

$$Q(x) = (x + 1)(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$$

Repetim el procediment amb $C(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ *i provem amb divisors de -12: -1,* ∓ 2, ∓ 3, ∓ 4, ∓ 6 *i* ∓ 12. *No cal provar amb +1 perquè ja ens ha donat anteriorment que no és arrel*

$C(-1) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 16(-1) - 12 = -36$ *No*
$C(2) = (2)^3 - 7(2)^2 + 16(2) - 12 = 0$ *Si*

per la regla de Ruffini, dividim C(x) per x + 2 i obtenim $x^2 - 5x + 6$

$$P(x) = (x + 1)\underbrace{(x - 2)(x^2 - 5x + 6)}_{C(x)}$$

Ara per descomposar el resultat obtingut, com és un polinomi de 2n grau, podem fer Ruffini o l'equació de segon grau

$$x^2 - 5x + 6$$

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Resultat: $P(x) = 2x\,(x + 1)(x - 2)\,(x - 2)\,(x - 3)$

Nota: Quan el polinomi que hem de descomposar és de 2n grau podem fer Ruffini o resoldre l'equació de segon grau corresponent. En aquest cas, de vegades, cal "ajustar" el resultat final.

Ex: Suposem que desprès d'aplicar Ruffini per la descomposició d'un polinomi ens queda $4x^2$ -8x -12,

En aplicar l'equació de 2n grau

$$4x^2 - 8x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 16}{8} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

De forma que quedaria $4x^2 - 8x - 12 = (x - 3)(x + 1)$ *cosa que és impossible ja que en fer el producte ens donaria* x^2 *no* $4x^2$, *per això cal "ajustar" el resultat multiplicant per 4*

$$4x^2 - 8x - 12 = 4 \cdot (x - 3)(x + 1)$$

• Aplicacions:
- Resolució d'equacions amb una incògnita
- Simplificació de fraccions algebraiques
- Operacions amb fraccions algebraiques

a) Resolució d'equacions amb una incògnita.
- Traiem factor comú
- Descomposem factorialment
- Igualem a 0 cada factor, algunes de les solucions són les arrels

Ex:

$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x = 0$
$x (x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24) = 0$

	1	6	3	-26	-24
2		2	16	38	24
	1	8	19	12	0
-3		-3	-15	-12	
	1	5	4	0	

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

$x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 24x = 0$
$x (x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24) = 0$
$x (x - 2) (x^3 + 8x^2 + 19x + 12) = 0$
$x (x - 2) (x + 3) (x^2 + 5x + 4) = 0$
$x (x - 2) (x + 3) (x + 1) (x + 4) = 0$

$x= 0$	$x - 2 = 0$	$x + 3 = 0$	$x + 1 = 0$	$x + 4 = 0$
	$x = 2$	$x = -3$	$x = - 1$	$x = - 4$

Solucions: 0, 2, -3, -1 i -4

b) Simplificació de fraccions algebraiques

1r. Numerador i denominador per separat,

- traiem factor comú si és possible ;
- descomposem factorialment i/o
- identifiquem i substituïm l'expressió per un producte notable (quan tenim un polinomi de segon grau);

2n. Escrivim la fracció però substituint el numerador i el denominador per les expressions equivalents trobades ;

3r. Eliminem les expressions que es repeteixen al numerador i al denominador

Ex:

$$\frac{x^3+6x^2+9x}{x^2-9} = \underbrace{\frac{x\cdot(x^2+6x+9)}{x^2-9}}_{\text{Traiem factor comú al numerador}} = \underbrace{\frac{x\cdot(x+3)^2}{(x+3)\cdot(x-3)}}_{\text{Apliquem un producte notable al denominador}} = \underbrace{\frac{x\cdot(x+3)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}}_{\text{Apliquem un producte notable al numerador}} = \underbrace{\frac{x\cdot(x+3)}{(x-3)}}_{\text{Simplifiquem}} = \frac{x^2+3x}{x-3}$$

Ex:

$$\frac{x^5-6x^4+9x^3+4x^2-12x}{x^6+6x^5+3x^4-26x^3-24x^2} = \frac{x\cdot(x^4-6x^3+9x^2+4x-12)}{x^2\cdot(x^4+6x^3+3x^2-26x-24)} =$$

$$= \frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-3)}{x^2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)} = \frac{(x+2)\cdot(x-3)}{x\cdot(x+3)\cdot(x+4)} = \frac{x^2-x-6}{x^3+7x^2+12x}$$

• Recordeu que només es poden simplificar factors, es a dir, nombres o expressions que estan multiplicant, i que no es troben directament implicats en una suma o en una resta.

Ex:

$$\frac{2\cdot(x-1)(x+5)}{2\cdot(x-1)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3} \qquad \textit{\textbf{Si}}$$

$$\frac{2x^2-x+3}{2x^2+4} = \frac{-x+3}{4} \qquad \textit{\textbf{No}}$$

c) Operacions amb fraccions algebraiques

Es treballa com amb fraccions numèriques fent m.c.m dels denominadors en la suma i/o resta.

Ex:

$$\frac{x}{x^2-9} + \frac{2}{x^3+6x^2+9x} = \frac{x}{(x+3)\cdot(x-3)} + \frac{2}{x\cdot(x+3)^2} =$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-9=(x+3)\cdot(x-3) \\ x^3+6x^2+9x=x\cdot(x+3)^2 \end{array}\right\} \quad m.c.m = x\cdot(x+3)^2\cdot(x-3)$$

$$=\frac{x\cdot x\cdot(x+3)}{x\cdot(x+3)^2\cdot(x-3)}+\frac{2\cdot(x-3)}{x\cdot(x+3)^2\cdot(x-3)}=\frac{x^3+3x^2+2x-3}{x\cdot(x+3)^2\cdot(x-3)}$$