TEMA 2 : Sistemes d'equacions lineals

Equació lineal amb n incògnites
Qualsevol expressió del tipus $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$ on $a_i \in$ |R és una equació lineal

a_i $(a \neq 0)$ – coeficient
a_0 – terme independent
x_i – incògnites

• Qualsevol conjunt de n nombres reals que verifica l'equació és solució de l'equació.
Ex: Donada l'equació $x + y + z + t = 0$ són solució (1, -1, 1, -1) i (-2, -2, 0, 4)

Sistemes d'equacions lineals
Conjunt d'expressions algebraiques de la forma

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

on x_i son las incògnites, $(i = 1,2,...,n)$
a_{ij} son los coeficients, $(i = 1,2,...,m)$ $(j = 1,2,...,n)$
b_i els termes independents $(i = 1, 2, ..., m)$
$a_{ij}, b_i, m, n \in$ |N

• Quan els termes independents són zero s'anomena sistema homogeni

• Solució d'un sistema: conjunt de valors que compleix totes les equacions

• Classificació:

a) segons el nombre de solucions
   - compatible: té solució
     determinat: una única solució
     indeterminat: moltes solucions
   - incompatible: no té solució

b) esglaonats: cada equació té una incògnita menys que l'anterior

c) equivalents: tenen la mateixa solució. S'obtenen sistemes equivalents per:
   - eliminació d'equacions linealment dependents:
     tots els coeficients són zero
     dues files són iguals
     una fila és proporcional a altre
     una fila és combinació lineal d'altres

- transformacions:
  canviar l'ordre de les equacions del sistema
  canviar l'ordre de les incògnites de l'equació
  multiplicar els dos membres de l'equació per un nombre diferent a 0
  substituir una equació per una combinació lineal d'ella i la resta sempre que el coeficient de l'equació substituïda sigui diferent de 0

<u>Mètode de Gauss</u>

Consisteix en transformar un sistema d'equacions en altre equivalent i esglaonat que ens permetrà solucionar el sistema si és possible. Per facilitar el càlcul es transforma el sistema en una matriu.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m$

Matriu A del sistema
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriu ampliada A* del sistema
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ex:

3x + 2y +   z = 1
5x + 3y + 4z = 2
 x +   y -   z = 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & |1 \\ 5 & 3 & 4 & |2 \\ 1 & 1 & -1 & |1 \end{pmatrix} \quad F_3 \leftrightarrow F_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |1 \\ 5 & 3 & 4 & |2 \\ 3 & 2 & 1 & |1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | \; 1 \\ 0 & -2 & 9 & |-3 \\ 0 & -1 & 4 & |-2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_2 - 2F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | \; 1 \\ 0 & -2 & 9 & |-3 \\ 0 & 0 & 1 & | \; 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} x + y - z = 1 \\ -2y + 9z = -3 \\ z = 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} z = 1 \\ y = 6 \\ x = -4 \end{matrix}$$

• Si en fer Gauss s'obté una equació 0 = K amb K$\neq$0 el sistema serà incompatible. Si s'obté 0 = 0 i el nombre d'incògnites és major al d'equacions serà compatible indeterminat.

Ex: Estudieu si hi ha cap valor de *m* pel qual el sistema és compatible. Si és així, resoleu el sistema.

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & 1 \\ m & 1 & m-1 & | & m \\ 1 & 1 & 1 & | & m+1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 - mF_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-m^2 & -1 & | & -0 \\ 0 & 1-m & 0 & | & m \end{pmatrix} \quad C_3 \leftrightarrow C_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 1 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & | & -0 \\ 0 & 0 & 1-m & | & m \end{pmatrix}$$

Si 1 – m = 0 → m = 1→ 1 = 0 *Sistema incompatible*
Si 1 – m ≠ 0 → m ≠ 1 *Sistema compatible determinat*

• Càlcul de la matriu inversa per Gauss

- Construir una matriu del tipus (A | I)
- Pel mètode de Gauss es transforma la meitat A en la matriu identitat, i la matriu que queda al costat dret és la matriu inversa A^{-1}

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 + F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 - F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 + F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (-1)F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Rang d'una matriu</u>

Nombre de files o columnes linealment independents, es a dir, que no es pot expressar una d'elles com a combinació lineal de les altres. És el nombre de files de la matriu transformada en sistema triangular diferents de zero.

Podem descartar una línea o columna si:

- tots els seus coeficients són zero
- hi ha dues línees o columnes iguals
- una línea o columna és proporcional a altre
- una línea o columna és combinació lineal de les altres

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Inicialment el rang de la matriu pot ser de 1 a 4, però com
F_3 és nul·la
$F_4=2F_2+F_1$
el rang serà 2.

$$r(A) = 2$$

En general es tracta de fer nul·les el nombre màxim de files o columnes i el rang serà el nombre de files o columnes no nul·les.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Com la segona fila s' anul·la i F_3 i F_4 no són combinació lineal l'una de l'altre, r(A)=3.

<u>Teorema de Rouché-Frobenius</u>

Donat un sistema sigui rang A el rang de la matriu del sistema i rang A* el rang de la matriu associada al sistema

rang A = rang A* = nombre d'incògnites	S. Compatible determinat
rang A = rang A* < nombre d'incògnites	S. Compatible indeterminat
rang A < rang A*	S. Incompatible

Ex:

$$\begin{aligned} x + 3y - \ \ z &= 1 \\ 2x - 5y + 4z &= 7 \\ 3x - 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 3E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - E_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{rang } A = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textit{rang } A^* = 3$$

Sistema incompatible

Ex: Discutiu segons el valor del paràmetre λ el següent sistema lineal

$$\begin{aligned} \lambda x + \ y + \ \ z &= 4 \\ x + \ y + 2z &= \lambda \\ x - \ y + \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

Hem d'intentar que el primer coeficient de la primera equació no sigui el paràmetre

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad C_1\ per\ C_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \\ -1 & 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & \lambda - 4 \\ 0 & 1+\lambda & \lambda + 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ (1+\lambda)E_2 - (1-\lambda)E_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & \lambda - 4 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + 3\lambda - 10 \end{pmatrix}$$

Si 1-λ=0 $\longrightarrow$ *λ=1 i substituïm al sistema inicial*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad F_2\ per\ F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

rang A = rang A = nombre d'incògnites*
3 = 3 = 3

Sistema compatible determinat

Si $\lambda^2 + \lambda$*=0* $\longrightarrow$ *λ=0 $\quad$ λ=-1*

Per λ=0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad C_2\ per\ C_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - E_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

*rang A < rang A**
2 = 3

Sistema incompatible

Per λ *=-1*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow C_2\, per\, C_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

*rang A < rang A**
2 = 3

Sistema incompatible

<u>Resolució de problemes</u>

- Determinem les variables
- Escrivim les dades en llenguatge algebraic
- Plantegem el sistema d'equacions i el resolem
- Responem allò que ens demanen tenint en compte la congruència dels resultats.

Ex: La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54900 €. Hi ha tres categories de treballadors A, B i C. El salari mensual d'un treballador de categoria A és de 900 €, el d'un de categoria B de 1500 € i el d'un de la C de 3000 €. L'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5% sense acomiadaments, per aquest motiu ha rebaixat un 5% el salari als treballadors de categoria A, un 4% als de la B i un 7% als de la C. Quants treballadors de cada categoria hi ha?

x = nombre de treballadors de categoria A
y = nombre de treballadors de categoria B
z = nombre de treballadors de categoria C

El nombre de treballadors és de 36 → $x + y + z = 36$

En un principi la despesa salarial és de 54900 € → $900x + 1500y + 3000z = 54900$

Amb una despesa 5% inferior a la inicial (5% de 54900 = 2745) els salaris es rebaixen. La suma del que s'estalvia en salaris és 2754 € → $5x/100 + 4y/100 + 7z/100 = 2754$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ 3x + 5y + 10z &= 183 \\ 3x + 4y + 14z &= 183 \end{aligned}$$

Pel mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 3 & 5 & 10 & 183 \\ 3 & 4 & 14 & 183 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3F_1 - F_2 \\ 3F_1 - F_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -7 & -75 \\ 0 & -1 & -11 & -75 \end{pmatrix} \rightarrow F_2 - 2F_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -7 & -75 \\ 0 & 0 & 15 & 75 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 11 \\ y = 20 \\ z = 5 \end{matrix}$$

Hi ha 11 treballadors de categoria A, 20 de categoria B i 5 de categoria C.