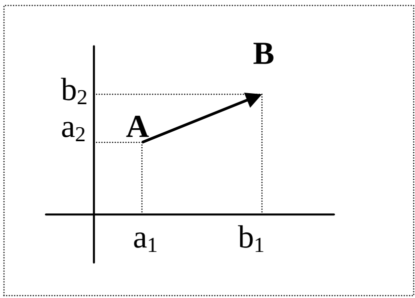
# Tema 2: GEOMETRIA ANALÍTICA AL PLA

Vector

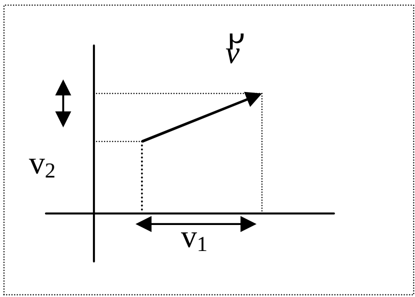
El vector $\overrightarrow{AB}$ és el segment orientat amb origen al punt A i extrem al punt B




Les projeccions del vector sobre els eixos són les components del vector:

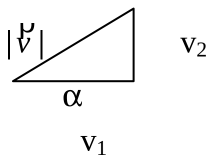
- Característiques:
  a) Mòdul $|\vec{v}|$. És la longitud del vector
  b) Direcció. És la recta sobre la que es troba el vector. Es determina mitjançant l'angle que forma el vector amb la horitzontal ( argument )
  c) Sentit

Ex:




$\vec{v} = ( v_1 , v_2 )$

Mòdul:




$|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Direcció: $\tan \alpha = \frac{v_2}{v_1}$ argument = $\alpha = \arctan \frac{v_2}{v_1}$

Sentit: NE

- Tipus de vectors:
  - Vectors equipol·lents. Són vectors que tenen el mateix mòdul, direcció i sentit, la qual cosa fa que tinguin els mateixos components
  - Vector lliure. Només es coneixen les components no l'origen ni l'extrem
  - Vector fix. Es coneixen origen i extrem

**( Exercici 1 )**

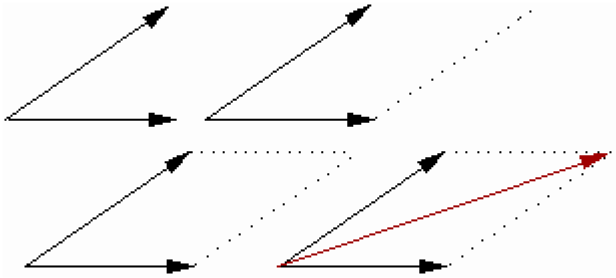
<u>Operacions amb vectors</u>

a) Suma

$\vec{v} = ( v_1 , v_2 )$

$\vec{w} = ( w_1 , w_2 )$

- Numericament: $\vec{v} + \vec{w} = ( v_1+w_1 , v_2+w_2 )$
- Graficament:



b) Producte per un nombre

$K \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = ( v_1 , v_2 )$

- Numericament: $K \cdot \vec{v} = ( K \cdot v_1 , K \cdot v_2 )$
- Graficament s'obté un vector amb la mateixa direcció però de diferent mòdul. Si el nombre és positiu el sentit es manté, si és negatiu canvia

c) Resta

$\vec{v} = ( v_1 , v_2 )$

$\vec{w} = ( w_1 , w_2 )$

- Numericament: $\vec{v} - \vec{w} = ( v_1-w_1 , v_2-w_2 )$
- Graficament consisteix en sumar a $\vec{v}$ l'oposat a $\vec{w}$ : $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + ( -1 ) \cdot \vec{w}$

<u>Combinació lineal de vectors</u>

El vector $\vec{w}$ és combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ si , $\exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ / $\vec{w} = \lambda\ \vec{u} + \mu\ v$

**( Exercici 2 )**

Dependència i independència lineal de dos vectors

- $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents si $\exists\, K \in |\mathbb{R}$ / $\vec{u} = K\,\vec{v}$ ( es a dir, les seves components són proporcionals i tenen la mateixa direcció )
- $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents si no es pot expressar un d'ells en funció de l'altre ( les direccions són diferents )

**( Exercici 2b)**

Base de vectors al pla

Un conjunt de vectors és base si,

- són linealment independents i
- qualsevol altre vector és combinació lineal d'aquests

Al pla la base està formada per dos vectors amb diferent direcció

• Siguin dos vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ de mòdul 1 i perpendiculars entre si, { $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ } són base ortonormal de $|\mathbb{R}^2$. El conjunt { O , $\vec{e}_1$ , $\vec{e}_2$ }, on O és l'origen de coordenades O = (0,0), és un sistema de referència ortonormal

**( Exercici 2c, 3c )**

Aplicacions geomètriques dels vectors

a) Divisió d'un segment en parts iguals
b) Alineació de tres punts

**( Exercici 4)**

Producte escalar

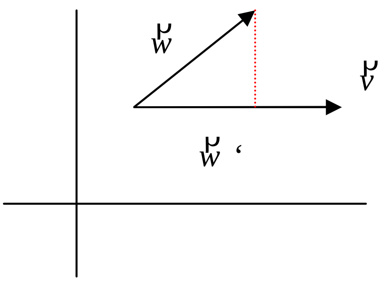
$\vec{v} = ( v_1 , v_2 )$
$\vec{w} = ( w_1 , w_2 )$

• Numericament

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |w| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$
$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

OJO: El producte escalar de dos vectors és un nombre real, no un vector

• Graficament




$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot$ projecció de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot \vec{w}$ '

- Propietats:
  a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
  b) $K(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (K \cdot \vec{v})\,\vec{w} = \vec{v}\,(K \cdot \vec{w})$
  c) $\vec{v}\,(\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u}$
  d) $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ( $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són ortogonals )

**( Exercici 2, 3 )**

**Exercici 1:** Donats els punts A = ( -5 , 2 ) i B = ( 0 , - 2 ). Trobeu:

a) components del vector $\overrightarrow{AB}$

b) mòdul, direcció i sentit de $\overrightarrow{AB}$

c) origen del vector equipol·lent a $\overrightarrow{AB}$ amb extrem ( 2 , - 3 )

d) vector unitari i amb la mateixa direcció que $\overrightarrow{AB}$

*a)* $\overrightarrow{AB} = ( 0 - ( - 5 ) , - 2 - 2 ) = ( 5 , - 4 )$

*b) Mòdul:* $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

*Direcció:* $\alpha = \arctan \frac{-4}{5} = -38{,}66^o$

*( l'altre angle amb la mateixa tangent és131,34º però per les components ho descartem)*

*Sentit: SE*

*c) vector equipol·lent ha de tenir les mateixes components*

$( 5 , - 4 ) = ( 2 - x , - 3 - y )$ *origen* $= ( - 3 , 1 )$

*d)* $\vec{v} = ( x , y )$

*unitari* $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$

*argument* $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ $\frac{-4}{5} = \frac{y}{x}$ $x = \frac{-5y}{4}$

$$\sqrt{\left(\frac{-5y}{4}\right)^2 + y^2} = 1$$

$$\sqrt{\frac{41y^2}{16}} = 1$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{16}{41}} \qquad x = \pm\frac{5}{\sqrt{41}}$$

*Hi ha dues possibilitats perquè la tangent és negativa*

$$\vec{v}_1 = ( \frac{5}{\sqrt{41}} , - \sqrt{\frac{16}{41}} )$$

$$\vec{v}_2 = ( - \frac{5}{\sqrt{41}} , \sqrt{\frac{16}{41}} )$$

**Exercici 2:** Tenim els vectors $\vec{u} = ( 2 , -3 )$, $\vec{v} = ( -3 , 1 )$, $\vec{w} = ( 5 , 0 )$

a) trobeu

$\vec{u} + \vec{v}$

$2\,\vec{w} - 3\,\vec{u}$

$$\vec{u} + \vec{v} = ( 2 , - 3 ) + ( -3 , 1 ) = $$
$$= ( 2 - 3 , - 3 + 1 ) =$$
$$= ( - 1 , - 2 )$$

$$2\,\vec{w} + 3\,\vec{u} = 2 ( 5 , 0 ) - 3 ( 2 , - 3 ) =$$
$$= ( 4 , 9 )$$

b) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents?

*Si ja que no es pot expressar un d'ells com a combinació lineal de l'altre*

$$\vec{u} = ( 2 , -3 )$$
$$\frac{-3}{2}\,\vec{u} = ( - 3 , \frac{9}{2} )$$
$$\frac{-1}{3}\,\vec{u} = ( \frac{-2}{3} , 1 )$$

c) quins d'aquests vectors poden ser base?

*Tots ells agafats de dos en dos ja que tenen diferent direcció*

$$\alpha_{\vec{u}} = arc\ tan\ \frac{-3}{2} \qquad \alpha_{\vec{u}} = -56{,}31^{o}$$
$$\alpha_{\vec{v}} = arc\ tan\ \frac{1}{-3} \qquad \alpha_{\vec{v}} = 161{,}56^{o}$$
$$\alpha_{\vec{w}} = arc\ tan\ \frac{0}{5} \qquad \alpha_{\vec{w}} = 0^{o}$$

**Exercici 3:** Donats els vectors $\vec{w} = ( 2 , -1 )$ i $\vec{v} = ( 5 , 0 )$

a) trobeu $\vec{v} \cdot \vec{w}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 =$$
$$= 5 \cdot 2 + 0 \cdot ( - 1 ) = 10$$

b) angle ($\vec{v}, \vec{w}$)

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |w| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$

$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$10 = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{10}{5\sqrt{5}}$ $\alpha = 26{,}56^o$

c) són base $\vec{v}$ i $\vec{w}$?

*Si ja que formen un angle diferent de 0º, estan sobre rectes diferents*

d) vector ortogonal a $\vec{v}$ de mòdul 1

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \cdot 5 + u_2 \cdot 0 = 0 \\ 1 = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5u_1 = 0 \\ 1 = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \end{array}\right\}$$

$u_1 = 0$

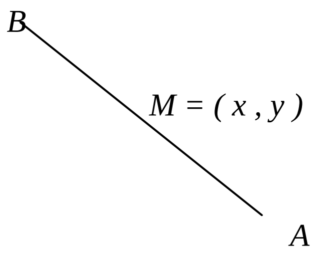
$1 = \sqrt{0^2 + u_2^{\,2}}$

$u_2 = 1$ $\vec{u} = (0, 1)$

$u_2 = -1$ $\vec{u} = (0, -1)$

**Exercici 4:** Donats els punts A = ( 2 , 3 ) i B = ( -4 , 5 )

a) Trobeu el punt mig M del segment AB



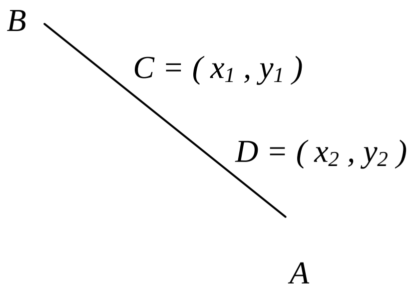

*El vector* $\overrightarrow{BM}$ *és la meitat del vector* $\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BM} = ( x - (-4) ,\ y - 5 )$
$\overrightarrow{BA} = ( 6 , -2 )$

$\overrightarrow{BM} = 1/2\ \overrightarrow{BA}$
$( x + 4 , y - 5 ) = ( 3 , -1 )$

$M = ( 2 , 4 )$

b) Dividiu el segment AB en tres parts iguals




*El vector* $\overrightarrow{BC}$ *és la tercera part del vector* $\overrightarrow{BA}$*, i* $\overrightarrow{BD}$ *és 2 / 3 parts del vector* $\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BC} = 1/3\ \overrightarrow{BA}$
$( x_1 + 4 , y_1 - 5 ) = 1/3\ ( 6, -2)$
$C = ( -2 , 13/3 )$

$\overrightarrow{BD} = 2/3\ \overrightarrow{BA}$
$( x_2 + 4 , y_2 - 5 ) = 2/3\ ( 6,-2)$
$D = ( 0 , 14/3 )$

<u>Equacions de la recta</u>

Una recta queda definida per:

- un punt de pas ( $x_1$ , $y_1$ ) i un vector director $\vec{v}$ = ( $v_1$ , $v_2$ )
- dos punts A = ( $a_1$ , $a_2$ ) i B = ( $b_1$ , $b_2$ ) on el punt de pas pot ser A o B i el vector director $\overrightarrow{AB}$ = ( $b_1 - a_1$ , $b_2 - a_2$ )

| Equació | | Vector Director | Pendent | Punts de pas |
|---|---|---|---|---|
| Vectorial | $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{v}$<br>$(x, y) = (x_1, y_1) + K(v_1, v_2)$ | | | |
| Paramètriques | $\left.\begin{array}{l} x = x_1 + k\,v_1 \\ y = y_1 + k\,v_2 \end{array}\right\}$ | $\vec{v} = (v_1, v_2)$ | $\dfrac{v_2}{v_1}$ | $(x_1, y_1)$ |
| Contínua | $\dfrac{x - x_1}{v_1} = \dfrac{y - y_1}{v_2}$ | | | |
| Punt – pendent | $y - y_1 = m(x - x_1)$ | | m | $(x_1, y_1)$ |
| Explícita | y = mx + n | | m | ( 0 , n )<br>$\left(\dfrac{-n}{m}, 0\right)$ |
| General, implícita o cartesiana | Ax + By + C = 0 | $\vec{v}$=(-B,A) | $\dfrac{A}{-B}$ | $\left(0, \dfrac{-C}{B}\right)$<br>$\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right)$ |

**( Exercici 5 )**

• Vector normal a una recta, és el vector perpendicular a una recta $\vec{v}$ = ( A , B )

Posició relativa de dues rectes

| Equació | Rectes | | |
|---|---|---|---|
| | Secants | Coincidents | Paral·leles |
| Explícites<br>$r_1$: $y = m_1 x + n_1$<br>$r_2$: $y = m_2 x + n_2$ | $m_1 \neq m_2$ | $m_1 = m_2$<br>$n_1 = n_2$ | $m_1 = m_2$<br>$n_1 \neq n_2$ |
| Generals<br>$r_1$: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$<br>$r_2$: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ | $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ | $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ | $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ |
| Amb un sistema d'equacions | S. compatible determinat | S. compatible indeterminat | S. incompatible |

**( Exercici 6 )**

• Per trobar <u>l'angle que formen dues rectes</u> primer hem de comprovar la seva posició relativa i després calcular l'angle pel producte escalar dels vectors directors

**( Exercici 7 )**

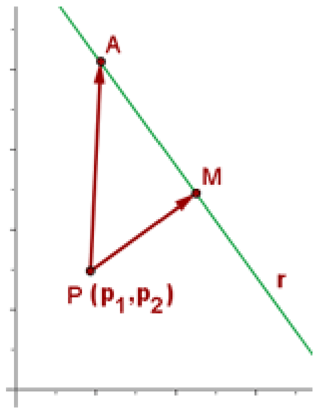
<u>Distàncies</u>

a) Distància entre dos punts

$$d\,(A, B) = |\,\overrightarrow{AB}\,|$$

b) Distància d'un punt a una recta

Sigui una recta r determinada i un punt P extern a la recta



Podem:

- trobar la recta perpendicular a r que passi pel punt P, trobar el punt d'intersecció de totes dues rectes M i calcular el mòdul del vector $\overrightarrow{PM}$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PM}|$$

- utilitzar la fórmula

$$d(P, r) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

c) Distància entre dues rectes

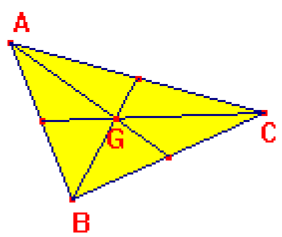
Per trobar la distància entre dues rectes paral·leles trobem la distància des d'un punt qualsevol d'una d'elles a l' altre recta

**(Exercici 8 i 9)**

Punts notables d'un triangle

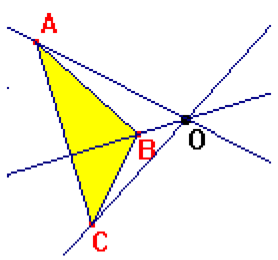
- baricentre (*G*) d'un triangle és la intersecció comuna de les tres medianes.

  Una mediana d'un triangle és el segment que va des d'un vertex al punt mitjà del costat oposat.




- ortocentre (*O*) d'un triangle és la intersecció comuna de les tres rectes que contenen les altures.

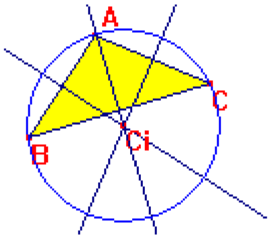
  Una altura és el segment perpendicular a un costat que passa pel vèrtex oposat. (*Nota*: el peu de la perpendicular pot estar a l'extensió del costat del triangle.)



Hauria de quedar clar que O no té per què estar en els segments que són les altures. Més aviat, *O* és a les rectes que extenen les altures.

- El circumcentre (*C*) d'un triangle és la intersecció de les mediatrius.

La mediatriu d'un costat és el segment perpendicular a aquest que passa pel punt mig.

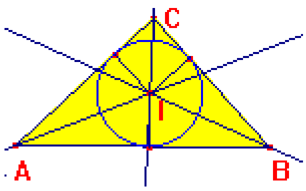



Noteu que *C* pot estar *fora* del triangle.

El circumcentre és el centre de la circumferència circumscrita al triangle.

- L'incentre ( *I* ) d'un triangle és el punt de l'interior d'un triangle on coincideixen les bisectrius.

Les bisectrius divideixen cada angle en dos de iguals




L'incentre és el centre de la circumferència inscrita al triangle.

**Exercici 5**: Una recta passa per A = ( 2 , 3 ) i és paral·lela al vector $\vec{v}$ = ( 2 , 1 ).

a) Trobeu les seves equacions.

*Si la recta és paral·lela a v aquest pot ser el seu vector director.*

$( x , y ) = ( 2 , 3 ) + K \cdot ( 2 , 1 )$ *Equació vectorial*

$x = 2 + 2K$
$y = 3 + 1K$ *Equacions paramètriques*

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1}$ *Equacions contínues*

$y = \frac{x+4}{2}$ *Equació explícita*

$x - 2y + 4 = 0$ *Equació general*

b) El punt ( 5 , 1 ) pertany a la recta?

*Si pertany a la recta* $\exists K \in \mathbb{R} \ / \ ( 5 , 1 ) = ( 2 , 3 ) + K ( 2 , 1 )$

$5 = 2 + 2K \quad K = \frac{3}{2}$
$1 = 3 + K \quad K = -2$

*no pertany a la recta*

c) pendent de la recta

*Pendent de la recta:* $\frac{1}{2}$

**Exercici 6:** Donada la recta y = 2x – 3

a) És paral·lela a 2x – 4y +5 = 0?

*Si són paral·leles tenen el mateix pendent*

*r:* $y = 2x - 3$ $m = 2$
*s:* $2x - 4y + 5 = 0$ $m' = \frac{1}{2}$

*no són paral·leles*

b) Equació general de la recta perpendicular que passa per ( 0 , -5 )

*Si és perpendicular el pendent és -1 / 2*

*A l'equació general m = - A/B*

$$A\,x + B\,y + C = 0$$
$$1\,x + 2\,y + C = 0$$

*si passa per ( 0 , - 5 )*

$$0 + 2\,(-5) + C = 0$$
$$C = 10$$

*L' equació de la recta perpendicular és x + 2 y + 10 = 0*

**Exercici 7:** Trobeu l'angle que formen les rectes r : y = 3x + 5 i s : 2x + y -1 = 0.

*Pendent de r* $m_r = 3$
*Pendent de s* $m_s = -2$ *són dues rectes secants no perpendiculars*

*L' angle que formen es el mateix que formen els vectors directors. Per producte escalar podem trobar l'angle*

$$\vec{v}_r = (1, 3)$$
$$\vec{v}_s = (-1, 2)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 5$$
$$|\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$|\vec{v}_s| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$$
$$5 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$$
$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*L' angle és de 45º*

**Exercici 8:** Trobeu l' àrea del triangle definit pels punts A = ( - 1 , 1 ) , B = ( 2 , 4 ) i C= ( 3 , 1 ).

*Suposem la base del triangle el segment* $\overline{AC}$

$$Base = d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(3-(-1))^2+(1-1)^2} = 2$$

*L' altura és la distància del punt B fins la recta que inclou el segment* $\overline{AC}$

*recta:* *punt de pas ( -1 , 1 )*
*vector director:* $\overrightarrow{AC} = (4, 0)$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} \qquad 4y-4=0$$

$$d(B, r) = \frac{|0\cdot 2+4\cdot 4-4|}{\sqrt{4^2+0^2}} = \frac{12}{2}$$

$$Àrea = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{2\cdot 6}{6} = 6\ u^2$$

**Exercici 9:** Trobeu l'equació de la recta paral·lela a y = 2x – 3 i que dista d'aquesta $\sqrt{5}$ unitats

*r és una recta paral·lela a 2x – y - 3 = 0, la seva equació serà*

$$2x - y + C = 0$$

*i un punt de la mateixa serà P = ( 0 , C )*
*La distància entre les rectes serà la distància des de P a la recta donada*

$$d(P, r) = \frac{|2\cdot 0-1\cdot C-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{|-C-3|}{\sqrt{5}}$$

$$5 = |-C-3|$$

*Hi ha dues possibilitats, i sortiran dues rectes*

$$\left\langle \begin{array}{lll} 5 = -C-3 & C=-8 & r_1: 2x-y-8=0 \\ -5 = -C-3 & C=2 & r_2: 2x-y+2=0 \end{array} \right.$$

**Exercici 10:** Trobeu el circumcentre del triangle definit per A = ( - 1 , 1 ) , B = ( 2 , 4 ) i C= ( 3 , 1 )

*Punt mig del segment* $\overline{AB}$ $\qquad M = \left( \frac{-1+2}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$

$\overrightarrow{AB} = (3, 3)$ $\qquad$ *vector normal a* $\overrightarrow{AB}$ : $\vec{v} = (3, -3)$

*Mediatriu del segment* $\overline{AB}$ $\qquad \dfrac{x - \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{y - \frac{5}{2}}{-3}$

$-2x - 2y + 6 = 0$

*Fem el mateix procés amb els segments* $\overline{AC}$ *i* $\overline{BC}$ ,

*Mediatriu del segment* $\overline{AC}$ : $\qquad -4x + 4 = 0$

*Mediatriu del segment* $\overline{BC}$ : $\qquad -2x + 6y - 10 = 0$

*El circumcentre és el punt de tall de les mediatrius:*

$$\left.\begin{array}{l} -2x - 2y + 6 = 0 \\ -4x \qquad + 4 = 0 \end{array}\right\} \qquad P = (1, 2)$$