TEMA 3 : Determinants

Determinant

A la matriu quadrada A se li assigna un valor numèric anomenat determinant d' A, |A| o det (A).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

a) Determinant d'ordre 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Ex: | 5 | = 5

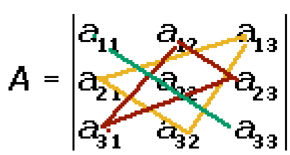
b) Determinant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

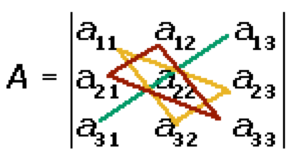
Ex:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) = 11$$

c) Determinant d'ordre 3. Regla de Sarrus.
Els termes amb signe positiu estan formats pels elements de la diagonal principal i els de les diagonals paral·leles amb el corresponent vèrtex oposat.



Els termes amb signe negatiu estan formats pels elements de la diagonal secundària i els de les diagonals paral·leles amb el corresponent vèrtex oposat.



Ex:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1{\cdot}1{\cdot}5 + 2{\cdot}(-1){\cdot}2 + 1{\cdot}0{\cdot}3 - 2{\cdot}1{\cdot}3 - 0{\cdot}(-1){\cdot}1 - 1{\cdot}2{\cdot}5 = -15$$

Menor complementari

S'anomena menor complementari d'un element a_{ij} al valor del determinant d'ordre n–1 que s'obté en suprimir en la matriu la fila *i* i la columna *j*. Aquesta matriu rep el nom de matriu adjunta.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriu adjunta de l'element a_{22} $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Menor complementari a a_{22} $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1{\cdot}2 - 3{\cdot}1 = -1$

L' **adjunt de l'element a_{ij}** és el menor complementari anteposant signe + si i+j és parell i - si i+j és senar.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Adjunt a l'element a_{21} és $-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -(2{\cdot}2-6{\cdot}1) = 2$

• Els adjunts d'una matriu ens permeten calcular el valor del determinant d'una matriu d'ordre major a 3. El valor del determinant d'una matriu és igual a la suma de productes dels elements d'una línea pels seus adjunts corresponents.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \dots + a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \end{vmatrix}$$

Ex:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(8+5) - 2(0-10) + 1(0+4) = 63$$

<u>Aplicacions dels determinants</u>

a) Càlcul del rang d'una matriu
b) Càlcul de la matriu inversa

a) Càlcul del rang d'una matriu.
   El rang d'una matriu és el més gran dels ordres dels seus menors diferents de zero. Com el procés pot ser molt llarg el que es fa és orlar els menors.
   Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \\ -9 & 4 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com la matriu és d'ordre 4 x 4 el rang serà més petit o igual a 4.

Agafem una matriu adjunta d'ordre 2

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad det(M_1) \neq 0, \text{ el rang de la matriu és com a mínim 2}$$

Orlem la quarta fila i mirem els determinants de les matrius adjuntes d'ordre 3

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 6 \\ -9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad det(M_2)=0$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ -9 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad det(M_3)=0$$

Tots els menors han donat 0 ja que la tercera fila és combinació lineal de les dues primeres. Podem eliminar-la.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu serà 2 o 3.

$$M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad det(M_4)=0$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad det(M_5) \neq 0$$

Com el determinant d'una matriu adjunta d'ordre 3 és diferent a zero, r(A) = 3.

b) Càlcul de la matriu inversa
- Calculem el determinant de la matriu, en el cas que sigui 0 la matriu no té inversa
- Si el determinant és no nul trobem la matriu adjunta A*
- Calculem la matriu transposada a l'adjunta $(A^*)^t$
- La matriu inversa és l'invers del valor del determinant per la matriu obtinguda

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$