Tema 3: FUNCIÓ EXPONENCIAL I LOGARÍTMICA

Equació exponencial

Es tracta d'una equació on la incògnita es troba a l'exponent d'una potència.

$$a^{f(x)} = b$$

No hi ha una única manera de solucionar aquestes equacions, però en general, podem diferenciar:

a) "immediates"
b) les potències tenen la mateixa base
c) les potències tenen com a base dos nombres diferents on un d'ells és el quadrat de l'altre

a) "immediates"
Ex:

$$5^{2x+1} = 625$$
$$5^{2x+1} = 5^4$$
$$2x+1 = 4$$
$$x = \frac{5}{2}$$

b) potències amb la mateixa base, utilitzem les propietats de les potències fins obtenir una de "immediata"
Ex:

$$2^x + 3 \cdot 2^{x-1} = 80$$
$$2^x + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} = 80$$
$$2^x + 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2} = 80$$
$$2^x \left(1 + \frac{3}{2} \right) = 80$$
$$2^x \cdot \frac{5}{2} = 80$$
$$2^x = \frac{80 \cdot 2}{5}$$
$$2^x = 32$$
$$x = 5$$

Ex:

$$5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^{x} = \frac{151}{25}$$

$$5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^{-2} + 5^x = \frac{151}{25}$$

$$5^x \left(5 + \frac{1}{25} + 1 \right) = \frac{151}{25}$$

$$5^x \cdot \frac{151}{25} = \frac{151}{25}$$

$$5^x = 1$$

$$x = 0$$

c) potències amb bases on una és el quadrat de l'altre. En aquest cas substituïm a^x per t i treballem com en una equació de segon grau; posteriorment calculem x

Ex:

$$4^x + 3 \cdot 2^x = 88$$

$$(2^2)^x + 3 \cdot 2^x = 88$$

$$(2^x)^2 + 3 \cdot 2^x = 88$$

$$\Big\downarrow \ t = 2^x$$

$$t^2 + 3t = 88$$

$$t^2 + 3t - 88 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-88)}}{2 \cdot 1} = \begin{matrix} 8 \\ -11 \end{matrix}$$

$2^x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 3$

$2^x = -11 \quad \rightarrow \quad$ No té solució

Ex:

$$9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$$

$$(3^2)^x - 6 \cdot 3^x \cdot 3 + 81 = 0$$

$$(3^x)^2 - 18 \cdot 3^x + 81 = 0$$

$$t = 3^x$$

$$t^2 - 18\,t + 81 = 0$$

$$t = 9$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Logaritmes

S'anomena logaritme amb base a (a>0) de b

$$\lg_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Ex:

$\lg_2 8 = 3$

$\lg_4 1 = 0$

$\lg_3 \frac{1}{9} = -2$

• Propietats:

a) $\lg_a a = 1$
b) $\lg_a 1 = 0$
c) $\lg_a (x \cdot y) = \lg_a x + \lg_a y$
d) $\lg_a \left(\frac{x}{y} \right) = \lg_a x - \lg_a y$
e) $\lg_a (x^n) = n \cdot \lg_a x$

Canvi de base:

$$Log_b x = \frac{Log_a x}{Log_a b},$$

Equacions logarítmiques

Són aquelles en què la incògnita està afectada per un logaritme.

Per resoldre aquestes equacions s'han d'aplicar les propietats dels logaritmes fins obtenir

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

per després igualar $f(x) = g(x)$

Ex:

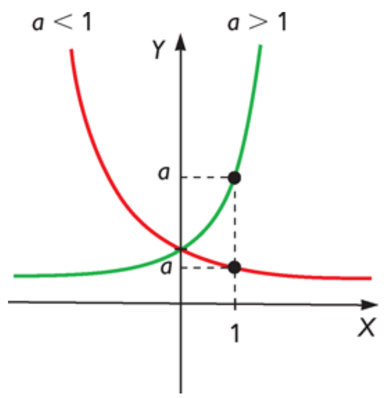
$$\log (116 - x^2) - 2 \log (x - 1) = 1$$
$$\log (116 - x^2) - \log (x - 1)^2 = 1$$
$$\log (116 - x^2) : (x - 1)^2 = \log 10$$
$$(116 - x^2) : (x - 1)^2 = 10$$
$$116 - x^2 = 10 (x - 1)^2$$
$$116 - x^2 = 10 (x^2 - 2x + 1)$$
$$116 - x^2 = 10x^2 - 20 x + 10$$
$$0 = 11x^2 - 20x - 106$$

$x = 4$

$x = -24/11$ solució no vàlida ja que $\log (-24/11 - 1)$ no existeix

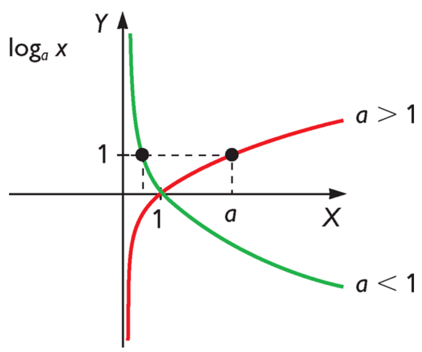
Funcions exponencials $f(x) = a^x$ per $a > 0$

a>1	Característiques	0<a<1
$\mathbb{R}$	Domini	$\mathbb{R}$
$(0,+\infty)$	Recorregut	$(0,+\infty)$
(0,1)	Punts de tall	(0,1)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



Funcions logarítmiques $f(x) = \log_a x$ per $a > 0$

a>1	Característiques	0<a<1
$(0,+\infty)$	Domini	$(0,+\infty)$
$\mathbb{R}$	Recorregut	$\mathbb{R}$
(1,0)	Punts de tall	(1,0)
No hi ha	Simetria	No hi ha
Si	Continuïtat	Si
Creixent	Creixement/Decreixement	Decreixent



● Les funcions $y = \log_a x$ i la funció $y = a^x$ són inverses, ja que els seus gràfics són simètrics respecte a la bisectriu del primer quadrant