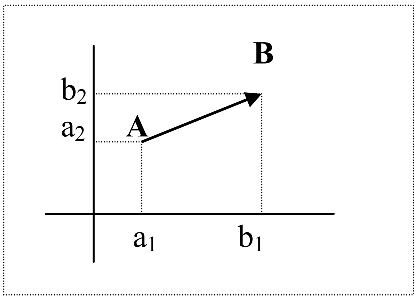
Tema 4: GEOMETRIA ANALÍTICA AL PLA. VECTORS

Vector

El vector $\overrightarrow{AB}$ és el segment orientat amb origen al punt A i extrem al punt B



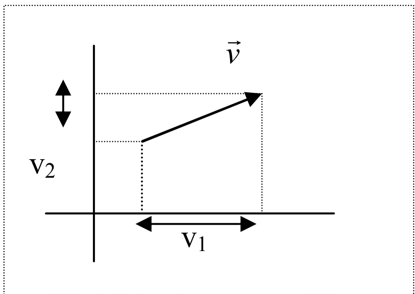
Les projeccions del vector sobre els eixos són les components del vector:

$$\overrightarrow{AB} = (\, b_1 - a_1 \,,\, b_2 - a_2 \,)$$

(Observem que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ són diferents)

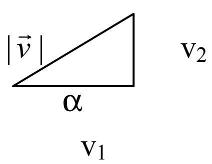
- Característiques:
  a) Mòdul $|\ \vec{v}\ |$. És la longitud del vector
  b) Direcció. És la recta sobre la que es troba el vector. Es determina mitjançant l'angle que forma el vector amb la horitzontal (argument)
  c) Sentit

Ex:



$\vec{v} = (\, v_1 \,,\, v_2 \,)$

Mòdul:



$$|\ \vec{v}\ |^2 = v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2}$$

$$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2}}$$

Direcció: $\tan \alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$ argument = $\alpha = \arctan \dfrac{v_2}{v_1}$

Sentit: NE

- Tipus de vectors:
  - Vectors equipol·lents. Són vectors que tenen el mateix mòdul, direcció i sentit, la qual cosa fa que tinguin els mateixos components (Es diferencien en l'origen i l'extrem)
  - Vector lliure. Només es coneixen les components no l'origen ni l'extrem
  - Vector fix. Es coneixen origen i extrem

(Exercici 1)

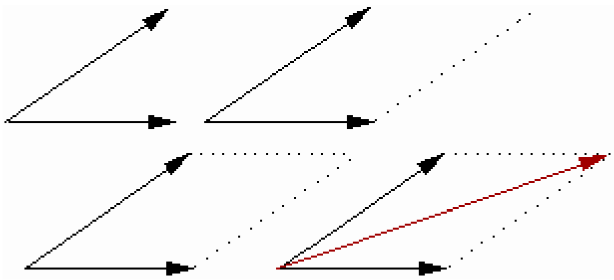
Operacions amb vectors

a) Suma

$\vec{v} = (v_1 , v_2)$

$\vec{w} = (w_1 , w_2)$

- Numèricament: $\vec{v} + \vec{w} = (v_1+w_1 , v_2+w_2)$
- Graficament:



b) Producte per un nombre

$K \in |R$

$\vec{v} = (v_1 , v_2)$

- Numericament: $K \cdot \vec{v} = (K \cdot v_1 , K \cdot v_2)$
- Graficament s'obté un vector amb la mateixa direcció però de diferent mòdul. Si el nombre és positiu el sentit es manté, si és negatiu canvia

c) Resta

$\vec{v} = (v_1 , v_2)$

$\vec{w} = (w_1 , w_2)$

- Numericament: $\vec{v} - \vec{w} = (v_1-w_1 , v_2-w_2)$
- Graficament consisteix en sumar a $\vec{v}$ l'oposat a $\vec{w}$: $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-1) \cdot \vec{w}$

Combinació lineal de vectors

El vector $\vec{w}$ és combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ si , $\exists \lambda, \mu \in |R$ / $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu$ v

(Exercici 2)

Dependència i independència lineal de dos vectors

- $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents si $\exists\, K \in$ |R / $\vec{u} = K\ \vec{v}$ (es a dir, les seves components són proporcionals i tenen la mateixa direcció)
- $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents si no es pot expressar un d'ells en funció de l'altre (les direccions són diferents)

(Exercici 2b)

Base de vectors al pla

Un conjunt de vectors és base si,

- són linealment independents i
- qualsevol altre vector és combinació lineal d'aquests

Al pla la base està formada per dos vectors amb diferent direcció

• Siguin dos vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ de mòdul 1 i perpendiculars entre si, { $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ } són base ortonormal de $|R^2$. El conjunt { O , $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ }, on O és l'origen de coordenades O = (0,0), és un sistema de referència ortonormal

(Exercici 2c, 3c)

Producte escalar

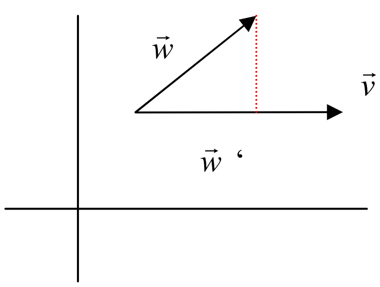
$\vec{v} = (v_1 , v_2)$
$\vec{w} = (w_1 , w_2)$

• Numericament

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\ \vec{v}\ | \cdot |\ w\ | \cdot \cos (\vec{v} , \vec{w})$
$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

OJO: El producte escalar de dos vectors és un nombre real, no un vector

• Graficament



$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\ \vec{v}\ | \cdot |\ \vec{w}\ | \cdot \cos (\vec{v} , \vec{w})$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\ \vec{v}\ | \cdot$ projecció de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\ \vec{v}\ | \cdot \vec{w}\ '$

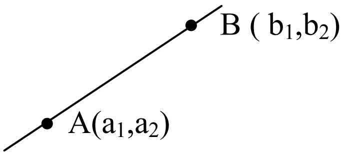
• Propietats:

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
b) $K (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (K \cdot \vec{v})\ \vec{w} = \vec{v}\ (K \cdot \vec{w})$
c) $\vec{v}\ (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u}$
d) $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ($\vec{v}$ i $\vec{w}$ són ortogonals)

(Exercici 2, 3)

Aplicacions dels vectors

a) Distància entre dos punts



$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

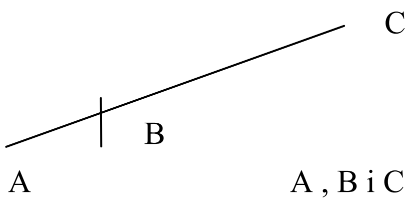
b) Punt mitjà d'un segment d'extrems A i B

A = (x_1 , y_1)

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

B = (x_2 , y_2)

c) Punts alineats



A , B i C estan alineats $\leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

(Exercici 4)

Exercici 1: Donats els punts A = (-5 , 2) i B = (0 , - 2). Trobeu:

a) components del vector $\overrightarrow{AB}$
b) mòdul, direcció i sentit de $\overrightarrow{AB}$
c) origen del vector equipol·lent a $\overrightarrow{AB}$ amb extrem (2 , - 3)
d) vector unitari i amb la mateixa direcció que $\overrightarrow{AB}$

a) $\overrightarrow{AB} = (0-(-5), -2-2) = (5, -4)$

b) Mòdul: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

Direcció: $\alpha = \arctan \dfrac{-4}{5} = -38{,}66^o$

(l'altre angle amb la mateixa tangent és131,34º però per les components ho descartem)

Sentit: SE

c) vector equipol·lent ha de tenir les mateixes components

$(5, -4) = (2-x, -3-y)$ *origen* $= (-3, 1)$

d) $\vec{v} = (x, y)$

unitari	$\sqrt{x^2+y^2} = 1$	$\sqrt{x^2+y^2} = 1$	$\sqrt{x^2+y^2} = 1$
argument	$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$	$\dfrac{-4}{5} = \dfrac{y}{x}$	$x = \dfrac{-5y}{4}$

$$\sqrt{\left(\frac{-5y}{4}\right)^2 + y^2} = 1$$

$$\sqrt{\frac{41y^2}{16}} = 1$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{16}{41}} \qquad x = \pm\frac{5}{\sqrt{41}}$$

Hi ha dues possibilitats perquè la tangent és negativa

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{5}{\sqrt{41}}, -\sqrt{\frac{16}{41}}\right)$$

$$\vec{v}_2 = \left(-\frac{5}{\sqrt{41}}, \sqrt{\frac{16}{41}}\right)$$

Exercici 2: Tenim els vectors $\vec{u} = (2 , -3)$, $\vec{v} = (-3 , 1)$, $\vec{w} = (5 , 0)$

a) trobeu

$\vec{u} + \vec{v}$

$2\ \vec{w} - 3\ \vec{u}$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (2 , - 3) + (-3 , 1) = \\ &= (2 - 3 , - 3 + 1) = \\ &= (- 1 , - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\ \vec{w} + 3\ \vec{u} &= 2 (5 , 0) - 3 (2 , - 3) = \\ &= (4 , 9) \end{aligned}$$

b) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents?

Si ja que no es pot expressar un d'ells com a combinació lineal de l'altre

$$\vec{u} = (2 , -3)$$

$$\frac{-3}{2}\vec{u} = (- 3 , \frac{9}{2})$$

$$\frac{-1}{3}\ \vec{u} = (\frac{-2}{3} , 1)$$

c) quins d'aquests vectors poden ser base?

Tots ells agafats de dos en dos ja que tenen diferent direcció

$$\alpha_{\vec{u}} = arc\ tan\ \frac{-3}{2} \qquad \alpha_{\vec{u}} = -56{,}31^o$$

$$\alpha_{\vec{v}} = arc\ tan\ \frac{1}{-3} \qquad \alpha_{\vec{v}} = 161{,}56^o$$

$$\alpha_{\vec{w}} = arc\ tan\ \frac{0}{5} \qquad \alpha_{\vec{w}} = 0^o$$

Exercici 3: Donats els vectors $\vec{w} = (2 , -1)$ i $\vec{v} = (5 , 0)$

a) trobeu $\vec{v} \cdot \vec{w}$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = \\ &= 5 \cdot 2 + 0 \cdot (- 1) = 10 \end{aligned}$$

b) angle $(\vec{v}, \vec{w})$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |w| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$

$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$10 = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{10}{5\sqrt{5}}$ $\qquad \alpha = 26{,}56^o$

c) són base $\vec{v}$ i $\vec{w}$?

Si ja que formen un angle diferent de 0º, estan sobre rectes diferents

d) vector ortogonal a $\vec{v}$ de mòdul 1

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \cdot 5 + u_2 \cdot 0 = 0 \\ 1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5u_1 = 0 \\ 1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \end{array}\right\}$$

$u_1 = 0$

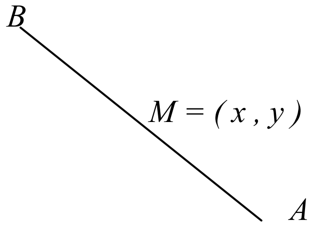
$1 = \sqrt{0^2 + u_2^2}$

$u_2 = 1 \qquad \vec{u} = (0, 1)$

$u_2 = -1 \qquad \vec{u}' = (0, -1)$

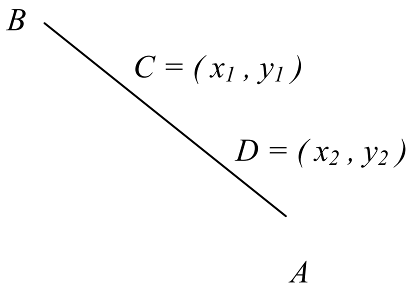
Exercici 4: Donats els punts A = (2 , 3) i B = (-4 , 5)

a) Trobeu el punt mig M del segment AB



$$M = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (-1,4)$$

b) Dividiu el segment AB en tres parts iguals



El vector $\overrightarrow{BC}$ *és la tercera part del vector* $\overrightarrow{BA}$*, i* $\overrightarrow{BD}$ *és 2 / 3 parts del vector* $\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BC} = 1/3\ \overrightarrow{BA}$

$(x_1 + 4 , y_1 - 5) = 1/3\ (6, -2)$

$C = (-2 , 13/3)$

$\overrightarrow{BD} = 2/3\ \overrightarrow{BA}$

$(x_2 + 4 , y_2 - 5) = 2/3\ (6, -2)$

$D = (0 , 14/3)$