Tema 5: GEOMETRIA ANALÍTICA AL PLA. LA RECTA

Equacions de la recta

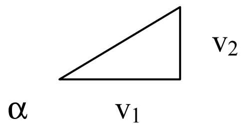
Una recta queda definida per:

- un punt de pas (x_1 , y_1) i un vector director $\vec{v}$ = (v_1 , v_2) que indica la direcció de la recta
- dos punts A = (a_1 , a_2) i B = (b_1 , b_2) on el punt de pas pot ser A o B i el vector director $\overrightarrow{AB}$ = ($b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$)

Equació		Vector Director	Pendent	Punts de pas
Vectorial	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{v}$ $(x , y) = (x_1 , y_1) + K (v_1 , v_2)$	$\vec{v} = (v_1,v_2)$	$\frac{v_2}{v_1}$	(x_1 , y_1)
Paramètriques	$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + k\,v_1 \\ y = y_1 + k\,v_2 \end{array}\right\}$			
Contínua	$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$			
Punt – pendent	$y - y_1 = m (x - x_1)$		m	(x_1 , y_1)
Explícita	$y = mx + n$		m	$(0 , n)$ $(\frac{-n}{m},0)$
General, implícita o cartesiana	$Ax + By + C = 0$	$\vec{v}=(-B,A)$	$\frac{A}{-B}$	$(0,\frac{-C}{B})$ $(-\frac{C}{A},0)$

(Exercici 1)

• El pendent de la recta ve donat per la tangent de l'angle que forma la recta amb l'horitzontal. Correspon amb la direcció del vector director.



$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$\alpha = \text{arc tan } \frac{v_2}{v_1}$$

$$\text{Pendent} = m = \frac{v_2}{v_1}$$

<u>Posició relativa de dues rectes</u>

Equació	Rectes		
	Secants	Coincidents	Paral·leles
Explícites r_1: $y = m_1 x + n_1$ r_2: $y = m_2 x + n_2$	$m_1 \neq m_2$	$m_1 = m_2$ $n_1 = n_2$	$m_1 = m_2$ $n_1 \neq n_2$
Generals r_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ r_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
Amb un sistema d'equacions	S. compatible determinat	S. compatible indeterminat	S. incompatible

(Exercici 2)

• Un cas especial de rectes secants són les rectes perpendiculars
- dues rectes r i s són perpendiculars si les seves pendents compleixen

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

- o si el producte escalar dels seus vectors directors és zero.

Això implica que, un vector normal a una recta r: Ax+By+C = 0, és el vector $\vec{v}$ = (A,B)

• Per trobar l’angle que formen dues rectes primer hem de comprovar la seva posició relativa i després calcular l’angle pel producte escalar dels vectors directors

(Exercici 3)

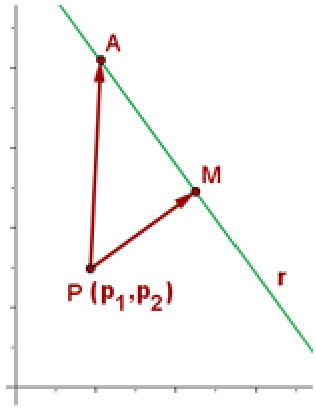
Distàncies

a) Distància entre dos punts

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

b) Distància d’un punt a una recta

Sigui una recta r determinada i un punt P extern a la recta



Podem:

- trobar la recta perpendicular a r que passi pel punt P, trobar el punt d’intersecció de totes dues rectes M i calcular el mòdul del vector $\overrightarrow{PM}$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PM}|$$

- utilitzar la fórmula

$$d(P, r) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

c) Distància entre dues rectes

Per trobar la distància entre dues rectes paral·leles trobem la distància des d’un punt qualsevol d’una d’elles a l’ altre recta

(Exercici 4 i 5)

Exercici 1: Una recta passa per A = (2 , 3) i és paral·lela al vector $\vec{v}$ = (2 , 1).

a) Trobeu les seves equacions.

Si la recta és paral·lela a v aquest pot ser el seu vector director.

$(x, y) = (2, 3) + K \cdot (2, 1)$ *Equació vectorial*

$x = 2 + 2K$
$y = 3 + 1K$ *Equacions paramètriques*

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1}$ *Equacions contínues*

$y = \frac{x+4}{2}$ *Equació explícita*

$x - 2y + 4 = 0$ *Equació general*

b) El punt (5 , 1) pertany a la recta?

Si pertany a la recta $\exists K \in \mathbb{R} \;/\; (5, 1) = (2, 3) + K(2, 1)$

$5 = 2 + 2K \quad K = \frac{3}{2}$
$1 = 3 + K \quad K = -2$

no pertany a la recta

c) pendent de la recta

Pendent de la recta: $\frac{1}{2}$

Exercici 2: Donada la recta y = 2x – 3

a) És paral·lela a 2x – 4y +5 = 0?

Si són paral·leles tenen el mateix pendent

r: $y = 2x - 3$ $m = 2$
s: $2x - 4y + 5 = 0$ $m' = \frac{1}{2}$

no són paral·leles

b) Equació general de la recta perpendicular que passa per (0 , -5)

Si és perpendicular el pendent és -1 / 2

A l'equació general m = - A/B

$A\,x + B\,y + C = 0$
$1\,x + 2\,y + C = 0$

si passa per (0 , - 5)

$0 + 2\,(-5) + C = 0$
$C = 10$

L' equació de la recta perpendicular és $x + 2\,y + 10 = 0$

Exercici 3: Trobeu l'angle que formen les rectes r : y = 3x + 5 i s : 2x + y -1 = 0.

Pendent de r $m_r = 3$
Pendent de s $m_s = -2$ *són dues rectes secants no perpendiculars*

L' angle que formen es el mateix que formen els vectors directors. Per producte escalar podem trobar l'angle

$\vec{v}_r = (1\,,\,3)$
$\vec{v}_s = (-1\,,\,2)$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s \cdot = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 5$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$$

$$5 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$$

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L' angle és de 45º

Exercici 4: Trobeu l' àrea del triangle definit pels punts A = (- 1 , 1) , B = (2 , 4) i C= (3 , 1).

Suposem la base del triangle el segment $\overline{AC}$

$$Base = d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-1)^2} = 2$$

L' altura és la distància del punt B fins la recta que inclou el segment $\overline{AC}$

recta: *punt de pas (-1 , 1)*
vector director: $\overrightarrow{AC} = (4, 0)$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} \qquad 4y-4 = 0$$

$$d(B, r) = \frac{|0 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{4^2 + 0^2}} = \frac{12}{4}$$

$$Àrea = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{24}{8} = 3\ u^2$$

Exercici 5: Trobeu l'equació de la recta paral·lela a y = 2x – 3 i que dista d'aquesta $\sqrt{5}$ unitats

r és una recta paral·lela a 2x – y - 3 = 0, la seva equació serà

$$2x - y + C = 0$$

i un punt de la mateixa serà P = (0 , C)
La distància entre les rectes serà la distància des de P a la recta donada

$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot C - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{|-C-3|}{\sqrt{5}}$$

$$5 = |-C-3|$$

Hi ha dues possibilitats, i sortiran dues rectes

$$\begin{cases} 5 = -C-3 & C = -8 & r_1: 2x - y - 8 = 0 \\ -5 = -C-3 & C = 2 & r_2: 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$