Tema 6: DERIVADES

Derivada d'una funció en un punt
S'anomena derivada de la funció f(x) en el punt a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ex:
f(x) = x^2 trobeu la derivada en $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2$$

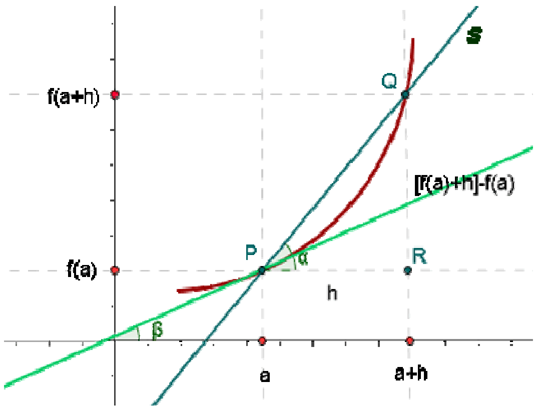
llavors f'(1) = 2

Ex:
Si f(x) = $\sqrt[3]{x}$, calculeu f'(0)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{\cancel{h}}{h^{\cancel{3}^2}}} = \lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{h^2}} = +\infty$$

Aleshores f no és derivable en $x_0 = 0$

• Interpretació geomètrica



El pendent de la recta secant a P i Q és

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \tan\alpha$$

Si h→0, es a dir P→Q, la recta s'aproxima a la tangent a la corba en P, i el seu pendent serà

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

El pendent de la recta tangent a una corba en un punt és igual a la derivada de la funció en aquest punt.

Funció derivada

És una funció que relaciona cada nombre real del domini amb la seva derivada

y = f'(x) o Df(x)

Si la funció f'(x) és derivable es defineix la seva derivada o funció derivada segona y'' i des d'aquesta la funció derivada y''' i així les derivades successives.

Ex:

f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	$f^{iv}(x)$
x^3	$3x^2$	6x	6	0
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
ln x	1/x	$-1/x^2$	2/x	$-2/x^2$
sen x	cos x	-sen x	-cos x	sen x

Operacions amb derivades

Funció	Derivada
Producte per un nombre	
$y=k\cdot u$	$y'=k\cdot u'$
Suma i resta	
$y=u+v-w$	$y'=u'+v'-w'$
Producte	
$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Quocient	
$y=\frac{u}{v}$	$y=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
Composició. Regla de la cadena	
$y=u\,(v\,(x))$	$y'=u'\,(v\,(x))\cdot v'(x)$

Càlcul de derivades

a) Derivades immediates (taula)
b) Derivada d'una funció en forma implícita
c) Derivació logarítmica

a) Derivades immediates

TAULA DE DERIVADES

Funció	Derivada	Exemples		Exemples	
Constant					
y = k	*y'=0*	*y = 8*	*y '= 0*		
Identitat					
y = x	*y' = 1*	*y = x*	*y'=1*		
Funcions potencials					
$y = x^m$	$y' = m \cdot x^{m-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$	$y = \left(2x^2+1\right)^3$	$y' = 3 \cdot \left(2x^2+1\right)^2 \cdot 4x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{x}$	$y' = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{x}$	$y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \frac{6x}{5 \cdot \sqrt[5]{\left(3x^2\right)^4}}$
Funcions exponencials					
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = 3^x$	$y' = 3^x \cdot \ln 3$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} \cdot \ln 5$
Funcions logarítmiques					
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln\left(x^2+7x\right)$	$y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_2\left(5x+7\right)$	$y' = \frac{5}{(5x+7) \cdot \ln 5}$
Funcions trigonomètriques					
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin 5x$	$y' = 5 \cdot \cos 5x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos 3x^2$	$y = -6x \cdot \sin 3x^2$
$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2 x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tg\,7x$	$y' = (1 + tg^2(7x)) \cdot 7$ $y' = \frac{7}{\cos^2(7x)}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$y = arctg\,x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg\,x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg\ 3x$	$y' = \frac{3}{1+(3x)^2}$

b) Derivada d'una funció implícita

Per derivar una funció implícita f(x,y) = 0, hem de derivar respecte a x i aplicar la regla de la cadena per y

Ex:

$$2xy-y^3-2x=0$$

$$2xy'-3y^2y'-2=0$$

$$y' = \frac{2}{2x-3y^2}$$

c) Derivació logarítmica

$$\ln y = \ln f(x)$$

$$\frac{y'}{y} = [\ln f(x)]'$$

$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$$

Ex:

$$f(x) = a^x$$

$$\ln f(x) = \ln a^x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

<u>Continuïtat i derivabilitat</u>

Si f és derivable en $x_0 \Rightarrow$ f és contínua en x_0 (el contrari no és cert)

Si f no és continua en $x_0 \Rightarrow$ f no és derivable en x_0

Si suposem que una funció f és continua en x_0 (ja que si no és continua no és derivable), si:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\ f'(x_0^-) \\ \\ \exists\ f'(x_0^+) \end{array}\right\} \quad i\ f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow \quad \exists\ f'(x_0)$$, la funció és *derivable en x_0*

Ex: Estudieu la derivabilitat de la funció: $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x \prec 2 \\ 3x-2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) <u>Continuïtat</u>

- si x < 2 → f (x) = x^2 polinomi → continua i derivable
- si x > 2 → f (x) = 3x – 2 polinomi → continua i derivable
- si x = 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x-2) = 4 \end{array}\right\} \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 4 \rightarrow \text{f és continua en x = 2}$$

f (x) és continua en |R

b) <u>Derivabilitat</u>

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ x \prec 2 \\ 3 & si\ x \succ 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2)=4 \\ f'_+(2)=3 \end{array}\right\} \nexists\ f'(x) \rightarrow \text{f no és derivable en x = 2}$$

f és continua en $|R$ i derivable en $R-\{2\}$

Ex:
Calculeu m i n perquè la funció següent sigui derivable en $x_0 = 1$

$$f(x)\begin{cases} x^2-5x+m & si\ x \leq 1 \\ -x^2+nx & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

Si f és derivable en x = 1 → f és continua en x = 1

a) <u>Continuïtat</u> → $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2-5x+m = m-4 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2+nx) = n-1 \end{array}\right\} m-4=n-1$$

b) <u>Derivabilitat</u> $\rightarrow$ $f_1^-(1) = f_1^+(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & si\ x \le 1 \\ -2x+n & si\ x \succ 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_-^{'}(1) = -3 \\ f_+^{'}(1) = n-2 \end{array}\right\} \quad -3 = n-2 \rightarrow n = -1 \longrightarrow \quad m - 4 = -1 - 1 \rightarrow m = 2$$

<u>Equació de la recta tangent a una corba en un punt</u>

El pendent de la recta tangent a una corba f(x) en un punt x_0 és igual a la derivada de la funció en aquest punt f ’(x_0). Si f(x) és derivable en x_0, l’equació de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt $P(x_0,y_0) = P(x_0,f(x_0))$ és:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$$ *Equació de la recta tangent*

Ex:

Trobeu l’equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x^2-2x}{x+3}$ en x_0= 3

f és continua i derivable en x_0

$$y_0 = y(3) = \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x-x-3)-x^2+2x}{(x+3)^2} =$$

$$\frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$$

$$f'(3) = \frac{9+18-6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Equació de la recta tangent: $\boxed{\left(y-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}(x-3)}$

• Anomenem *recta normal* a una corba en un dels seus punt, a la recta perpendicular a la recta tangent a la corba en aquest punt. El pendent de la recta normal a la funció f(x) en el punt x_0 serà: $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ i la seva equació serà:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)}$$ *Equació de la recta normal*

Ex:
Trobeu l'equació de la recta normal a la corba del exemple anterior en el mateix punt $x_0 = 3$

Equació de la recta normal: $\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{-12}{7}(x - 3)$