Tema 6: PROGRAMACIÓ LINEAL

Inequacions

És una desigualtat entre dues expressions algebraiques separades pels signes $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$.

Inequacions de primer grau amb una incògnita

La resolució consisteix en trobar els valor numèrics de la variable pels quals es compleix la desigualtat. Hem de:

i) eliminar els parèntesi
ii) eliminar els denominadors
iii) passem tots els termes que tenen incògnita (sola o acompanyada per un coeficient) a un costat de la desigualtat i la resta a l'altre. Hem de tenir en compte que en canviar de costat el nombres que estan

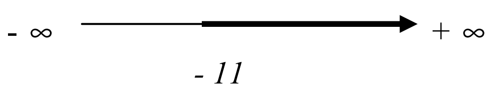
sumant	passen	restant
restant	"	sumant
multiplicant	"	dividint , ...

iv) agrupem termes i aïllem la variable. Si en fer aquest pas passem un nombre negatiu a l'altre banda multiplicant o dividint, el signe de la desigualtat s'inverteix, es a dir, de

$<$	passa a	$>$
$\leq$	passa a	$\geq$
$>$	passa a	$<$
$\geq$	passa a	$\leq$

Ex:

$$2x - 30 \leq 5x + 3$$
$$2x - 5x \leq 30 + 3$$
$$-3x \leq 33$$
$$x \geq \frac{33}{-3}$$
$$x \geq -11$$



$x \in \ [-11, +\infty)$

Sistemes d'inequacions amb una incògnita

Resolem per separat cadascuna de les inequacions i després trobem les solucions comuns.

Ex:

$$\begin{cases} x + 2 > 1 & \rightarrow \quad x > -1 \\ 3x - 2 < 1 & \rightarrow \quad 3x < 3 \quad \rightarrow \quad x < 1 \end{cases}$$

$x \in (-1,1)$

Inequacions lineals amb dues incògnites

És una desigualtat algebraica formada per dos incògnites, x i y, que té com a solució una regió del pla en la que els valors numèrics dels punts (x_i , y_j) que la formen compleixen la inequació.

• Resolució:

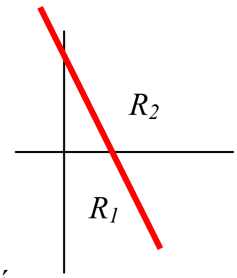
- Expressem la desigualtat com una igualtat i s'obté l'equació d'una recta
- Representem la recta a través de dos punts (per exemple els punts de tall amb els eixos) de forma que el pla queda dividit en dues regions o semiplans
- Agafem un punt qualsevol de cada zona i comprovem si compleix la inequació. Si un punt verifica la desigualtat tota la regió és solució de la inequació.

Ex:

$2x + y > 4$

$2x + y = 4$

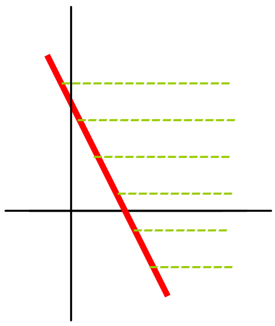
$y = -2x + 4$ *passa per* $\begin{array}{llll} (0,4) & \leftarrow & x=0 & y=-2\cdot 0+4 \\ (2,4) & \leftarrow & y=0 & 0=-2x+4 \end{array}$



agafem un punt de cada regió i verifiquem si compleix la inequació

R_1	$(0,0)$	$2 \cdot 0 + 0 > 4$?	*No*
R_2	$(2,2)$	$2 \cdot 2 + 2 > 4$?	*Si*

la solució és la regió R_2 i no inclou la recta ja que la desigualtat no conté el signe =



Sistemes d'inequacions amb dues incògnites

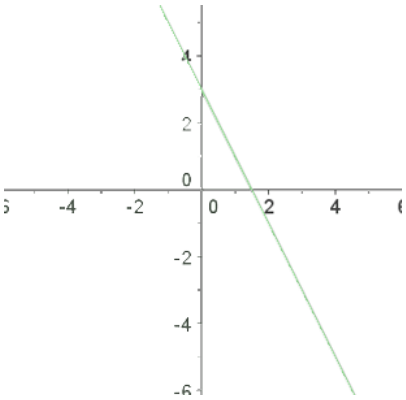
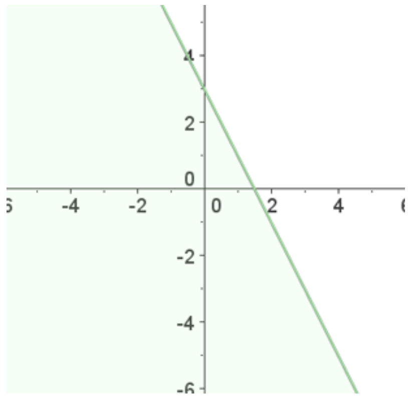
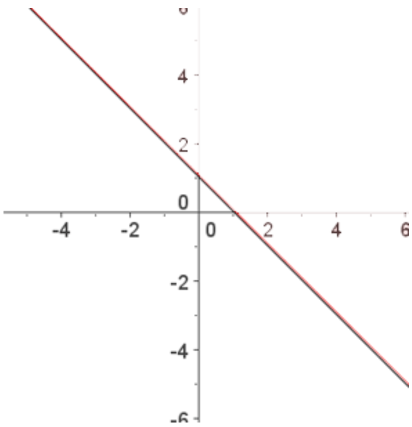
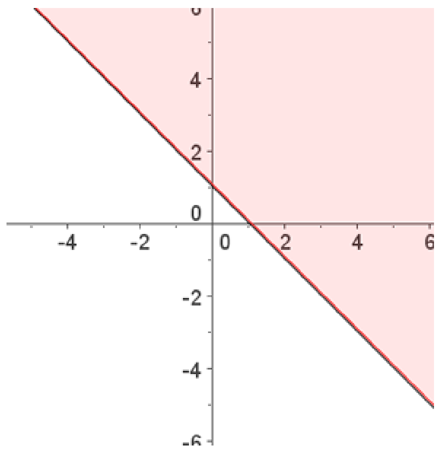
És un conjunt d'inequacions lineals amb dues incògnites de les quals volem trobar la solució comuna.

• Resolució

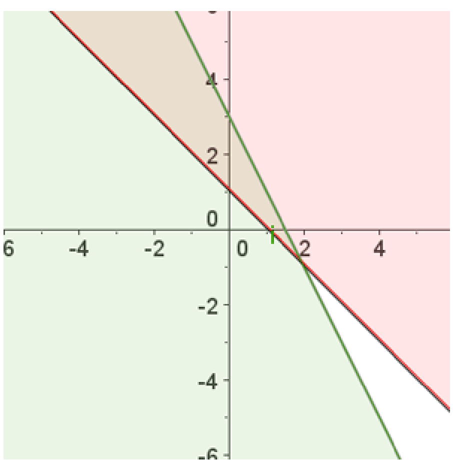
- Resolem cada inequació per separat determinant la regió-solució en cada cas.
- Escollim la regió del pla que verifica totes dues inequacions que correspon a la intersecció de les solucions obtingudes anteriorment.

Ex:

$$\begin{cases} 2x+y\le 3 & \rightarrow \quad 2x+y=3 \quad \rightarrow \quad (0,3)\ (\frac{3}{2},0) \\ x+y\ge 1 & \rightarrow \quad x+y=1 \quad \rightarrow \quad (0,1)\ (1,0) \end{cases}$$

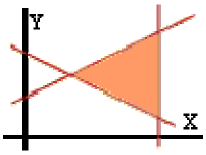





La solució és

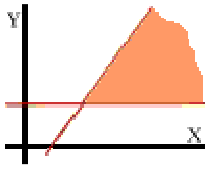


Funció objectiu
És una funció lineal de dues variables f (x,y) = ax + by (a, b ∈ |R) que utilitzarem posteriorment per la resolució de problemes

• La funció objectiu, concretament les variables x i y, està sotmesa a un **conjunt de restriccions** que ve donat per un sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites. La regió solució del conjunt de restriccions és, en general, un polígon convex del pla que s'anomena **regió factible**, si be de vegades pot donar una zona no acotada.



Regió acotada



Regió no acotada

En el cas de tenir una regió acotada cal trobar els vèrtexs del polígon que corresponen als punts d'intersecció dels segments que limiten la regió factible.

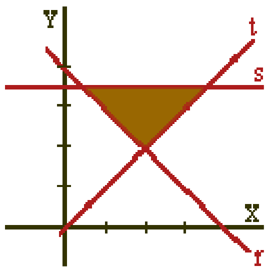
Ex: Determineu la regió factible representada per

$$x + y \geq 4$$
$$y \leq 4$$
$$y \geq x$$

El polígon està determinat per les rectes

r: $y = 4 - x$
s: $y = 4$
t: $y = x$

de manera que la regió factible és



Ara hem de determinar els vèrtexs

$$\begin{cases} r: y = 4 - x \\ s: \quad y = 4 \end{cases} \qquad 4 - x = 4 \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 4 \end{matrix} \qquad (0, 4)$$

$$\begin{cases} r: y = 4 - x \\ s: \quad y = x \end{cases} \qquad 4 - x = x \qquad \begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \end{matrix} \qquad (2, 2)$$

$$\begin{cases} r: \quad y = 4 \\ s: \quad y = x \end{cases} \qquad 4 = x \qquad \begin{matrix} x = 4 \\ y = 4 \end{matrix} \qquad (4, 4)$$

Teorema de localització. Optimització de la funció objectiu

Si una funció objectiu subjecta a un conjunt de restriccions té solució i està acotada, el valor òptim de la funció s'obté en un dels vèrtexs de la regió factible o en un dels seus costats.

Ex: Donada la funció f(x,y) = 50x+40y i el conjunt de restriccions següent

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 1500 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

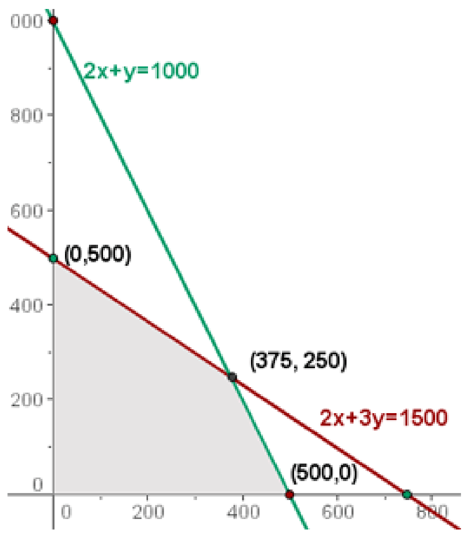
Trobeu el punt de la regió factible que fa màxima la funció.

Trobem la regió factible com intersecció de les restriccions i els seus vèrtexs

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1500 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad (0{,}500)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1500 \\ 2x + y = 1000 \end{cases} \rightarrow \quad (375{,}250)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad (500{,}0)$$



Pel teorema de localització el màxim es troba en un dels vèrtexs

f(x,y)=50x + 40y

f(0,500) = 50·0+40·500= 20000
f(375,250) = 50·375+40·250= 28750
f(500,0) = 50·500+40·0= 25000

La funció es fa màxima per x=375 i y=250

• En el cas de que la regió factible no estigui acotada, la solució òptima pot estar entre els punts d'alguna de les semirectes que formen la regió.

Programació lineal

La programació lineal dona resposta a situacions en les que es demana maximitzar o minimitzar funcions que tenen limitacions o restriccions. S'utilitza en sectors com la indústria, l'economia, l'estratègia militar, ...

Per resoldre un problema de programació lineal:

- Escollir les incògnites
- Escriure la funció objectiu segons les dades del problema
- Escriure les restriccions en forma d'inequacions
- Representar la regió factible
- Calcular les coordenades dels vèrtex
- Calcular el valor de la funció objectiu per cada un dels vèrtexs per veure si en ells es troba el valor màxim o mínim. Si la regió no està acotada és possible que no hagi solució.

Ex: A una persona li toquen 10000 € en un sorteig i li aconsellen que ho inverteixi en dos tipus d'accions: A i B. Les de tipus A tenen més risc però produeixen un benefici del 10%. Les de tipus B són més segures però només produeixen el 7% anual. Decideix invertir com a màxim 6000 € en les A i al menys 2000 € en les B. A més, decideix que la inversió en A sigui, com a mínim, igual a la inversió en B. Com ha de fer la inversió per tal que el benefici anual sigui màxim?

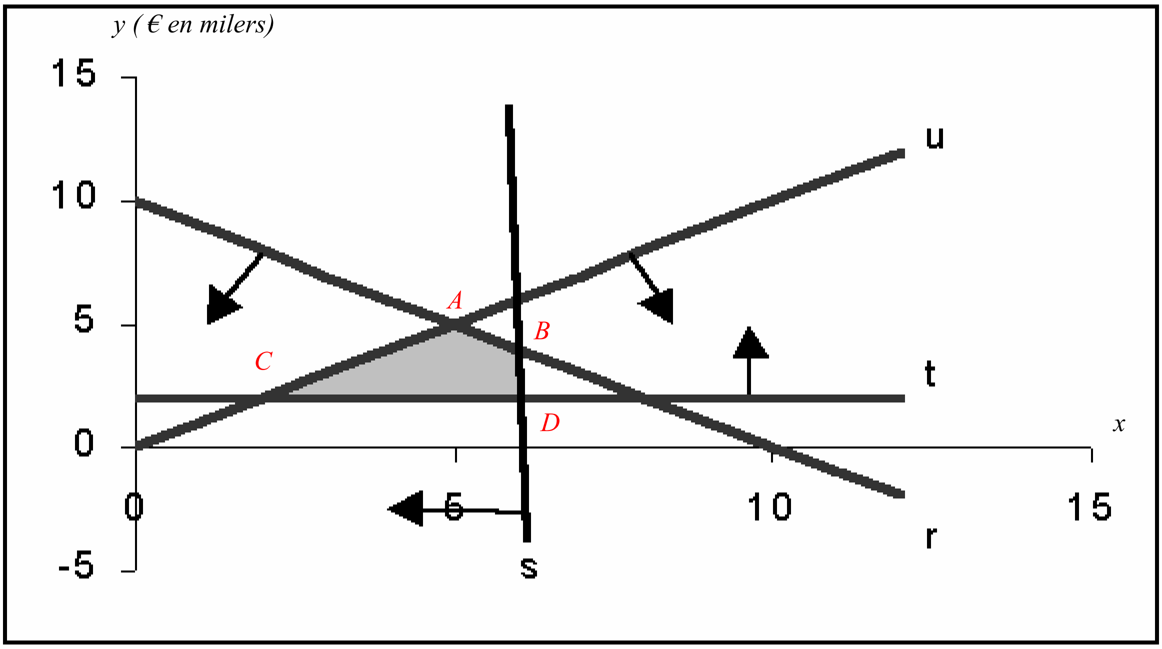
x = quantitat invertida en A
y = quantitat invertida en B

funció objectiu: $f(x,y) = \frac{10}{100}x + \frac{7}{100}y$

Restriccions:

- es disposa de 10000 €	$x + y \leq 10000$	*r*
- inversió màxima en A 6000 €	$x \leq 6000$	*s*
- inversió mínima en B 2000 €	$y \geq 2000$	*t*
- inversió en A com a mínim igual a B	$x \geq y$	*u*
- les quantitats invertides són positives	$x \geq 0 \quad y \geq 0$	

La regió factible és



Trobem els vèrtexs:

A $\begin{cases} x + y = 10 \\ x = y \end{cases} \rightarrow (5,5)$

B $\begin{cases} x + y = 10 \\ x = 6 \end{cases} \rightarrow (6,4)$

C $\begin{cases} x = y \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow (2,2)$

D $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow (6,2)$

i substituïm els valors trobats a la funció objectiu per trobar el màxim

f(A) = 0,1 · 5000 + 0,07 · 5000 = 850 €
f(B) = 0,1 · 6000 + 0,07 · 4000 = 880 €
f(C) = 0,1 · 2000 + 0,07 · 2000 = 340 €
f(D) = 0,1 · 6000 + 0,07 · 2000 = 740 €

El benefici serà màxim en invertir 6000 € en accions A i 4000 € en B

Ex: Una refineria de petroli te dues fonts de petroli cru: cru lleuger, que costa 35 dòlars per barril i cru pesat a 30 dòlars el barril. Amb cada barril de cru lleuger, la refineria produeix 0,3 barrils de benzina (B), 0,2 barrils de combustible per calefacció (C) i 0,3 barrils de combustible per turbines (T), mentre que per cada barril de cru pesat es produeixen 0,3 barrils de B, 0,4 de C i 0,2 de T. La refineria ha contractat el subministrament de 900000 barrils de G, 800000 de C i 500000 de T. Trobeu les quantitats de cru lleuger i pesat que ha de comprar per poder cobrir les seves necessitats amb un cost mínim.

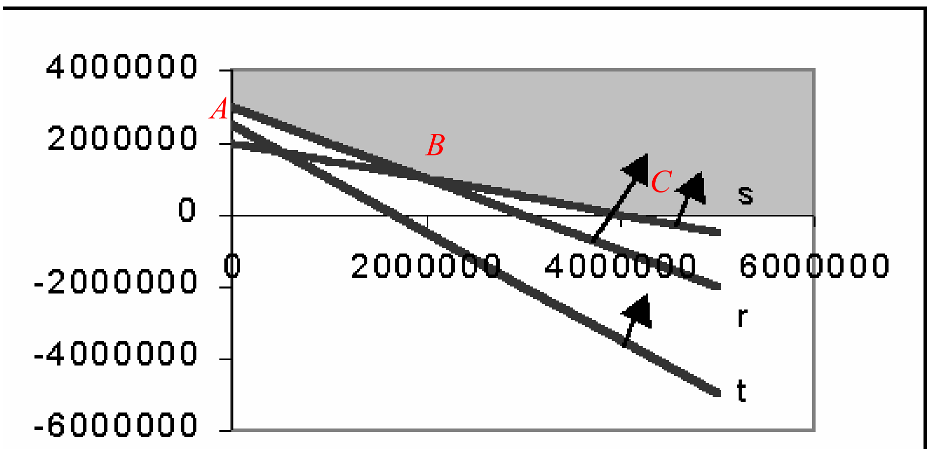
x = nº de barrils de cru lleuger
y = nº de barrils de cru pesat

La funció que cal minimitzar és el cost $f(x,y) = 35x + 30y$

Les restriccions

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 & \\ 0{,}3x + 0{,}3y \geq 900000 \;\rightarrow\; x + y \geq 3000000 & r \\ 0{,}2x + 0{,}4y \geq 800000 \;\rightarrow\; x + 2y \geq 4000000 & s \\ 0{,}3x + 0{,}2y \geq 500000 \;\rightarrow\; 3x + 2y \geq 5000000 & t \end{cases}$$

i la regió factible



Trobem els vèrtexs

A $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 300000 \end{cases} \rightarrow (0{,}300000)$

B $\begin{cases} x + y = 300000 \\ x + 2y = 400000 \end{cases} \rightarrow (2000000{,}1000000)$

C $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 400000 \end{cases} \rightarrow (0{,}4000000)$

i substituïm els valors trobats a la funció objectiu per trobar el mínim

f(A) = 90.000.000
f(B) = 100.000.000
f(C) = 140.000.000

El cost mínim és per la compra de 3.000.000 de barrils de cru lleuger i cap de cru pesat.