TEMA 7. Límit de funcions i continuïtat

Funció

S'anomena funció real de variable real a tota aplicació que fa correspondre a cada element d'un conjunt inicial (o domini) un i només un element d'un conjunt final (o recorregut).

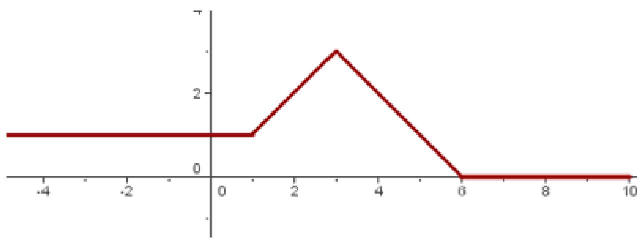
$$y = f(x)$$

La variable *x* s'anomena variable independent i la variable *y* variable dependent

Límit d'una funció en un punt

El límit de la funció f(x) en el punt *a*, es a dir $\lim_{x\to a} f(x)$, és el valor que te la *y* quan *x* s'aproxima a *a* (no quan x=*a* ja que això seria la imatge de *a* o f(*a*)).

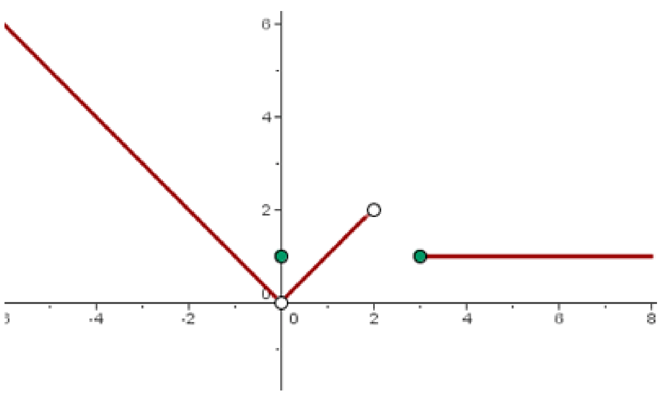
Ex:



$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ *si ens apropem a x=0 per la dreta (quan x=0,000...01) o per l'esquerra (x=-0,000...01), el valor de la y tendeix a ser 1*

• Els límits $\lim_{x\to a^+} f(x)$ o límit per la dreta i $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o límit per l'esquerra , s'anomenen *límits laterals* de la funció f(x)

Ex:



Per x=0 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *(valor de la y en apropar-nos per la dreta)*

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ *(valor de la y en apropar-nos per l'esquerra)*

• Per tal que existeixi el límit d'una funció en un punt és necessari que existeixin els límits laterals i que siguin iguals, es a dir

$$\text{Si } \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \text{L} \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x) = \text{L}$$

En el cas anterior, com el límit per la dreta i l'esquerra de 0 són iguals (tots dos valen 0) podem dir que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$*. A més observem que el límit no té perquè coincidir amb la imatge de x=0 per la funció ja que f(0) = 1*

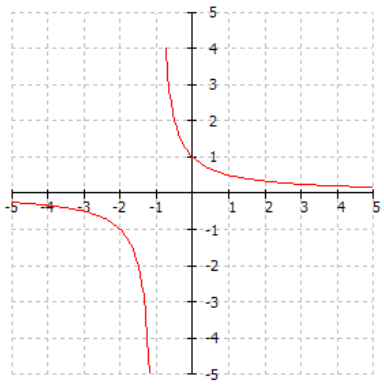
Per contra , si $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to a} f(x)$

<u>Límit d'una funció en l'infinit</u>

El límit de f(x) quan x tendeix a $+\infty$ és L, es a dir, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{L}$, si per valors de x molt i molt grans el valor de y s'aproxima a L.

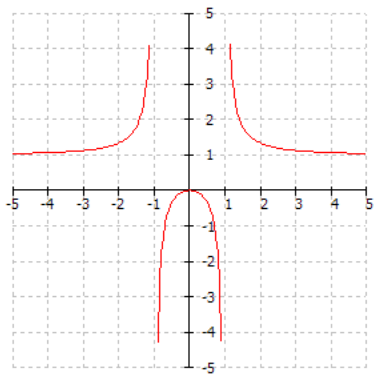
El límit de f(x) quan x tendeix a $-\infty$ és L, es a dir, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{L}$, si per valors de x molt i molt petits el valor de y s'aproxima a L.

Ex:



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

• Els límits quan x tendeix a $+\infty$ i quan x tendeix a $-\infty$ no tenen perquè coincidir

Càlcul de límits
En el càlcul de límits és necessari operar amb expressions en les que apareix infinit. En alguns casos coneixem el resultat

$$+\infty \pm k = +\infty$$
$$-\infty \pm k = -\infty$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$-(-\infty) = +\infty$$

$$k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & si \quad k > 0 \\ -\infty & si \quad k < 0 \end{cases}$$
$$k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & si \quad k > 0 \\ +\infty & si \quad k < 0 \end{cases}$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{k}{+\infty} = \frac{k}{-\infty} = 0$$
$$\frac{0}{+\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$
$$\frac{k}{0} = \begin{cases} +\infty & si \quad k > 0 \\ -\infty & si \quad k < 0 \end{cases}$$
$$\frac{+\infty}{0} = +\infty$$
$$\frac{-\infty}{0} = -\infty$$

$$k^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & si \quad k > 1 \\ 0 & si \quad 0 \le k < 1 \end{cases}$$
$$k^{-\infty} = \begin{cases} 0 & si \quad k > 1 \\ +\infty & si \quad 0 \le k < 1 \end{cases}$$
$$(+\infty)^{k} = \begin{cases} +\infty & si \quad k > 0 \\ 0 & si \quad k < 0 \end{cases}$$
$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$$
$$(+\infty)^{-\infty} = 0$$

en d'altres el resultat pot variar o no existir, és el que s'anomena indeterminacions

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

i. Càlcul de límits en un punt

a) Substitució. Es substitueix la x per a
Ex:

$$\lim_{x \to 2} 3^{\frac{x-1}{x}} = 3^{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{3}$$

b) Indeterminació $\frac{0}{0}$.

Quan substituïm la x per a de vegades apareix la indeterminació $\frac{0}{0}$.

En aquests casos: descomponem factorialment numerador i denominador, simplifiquem i substituïm

Ex:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5x-24}{x^3+6x^2-19x-24}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{3^2+5\cdot 3-24}{3^3+6\cdot 3^2-19\cdot 3-24}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5x-24}{x^3+6x^2-19x-24}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+8)}{(x+1)(x-3)(x+8)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

c) Indeterminació $\infty-\infty$

Es fa la resta i desprès es substitueix

Ex:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{x^2-4}-\frac{2x}{x^2-x-2}=\frac{3}{0}-\frac{4}{0}=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x-2)(x+2)}-\frac{2x}{(x-2)(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+1)}{(x-2)(x+2)(x+1)}-\frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2+3x-1}{(x-2)(x+2)(x+1)}=\frac{1}{0}=\infty$$

ii. Càlcul de límits en l'infinit

a) <u>Indeterminació</u> $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = a \quad \text{on}$$

a = 0   si grau Q(x) > grau P(x)
a = ∞   si grau Q(x) < grau P(x)
a = $\frac{a}{b}$ si grau Q(x) = grau P(x)
(on *a* i *b* són els coeficients que acompanyen a la x amb el màxim exponent)

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^3-1} = 0 \qquad (\frac{grau2}{grau3})$$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{4x^5+x} = \frac{1}{4} \qquad (\frac{grau5}{grau5})$$

b) <u>Indeterminació</u> $\infty - \infty$

Hem de diferenciar dos casos:

- Fraccions algebraiques
- Arrels

- Fraccions algebraiques. Hem de fer la resta i calcular el límit

  Ex:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{x+1} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2-1} - \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+3}{x^2-1} = 1$$

- Arrels. Multipliquem i dividim pel conjugat

  Ex:

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2-4x+8} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-4x+8})(x+\sqrt{x^2-4x+8})}{(x+\sqrt{x^2-4x+8})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+4x-8}{(x+\sqrt{x^2-4x+8})} = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2}$$

c) $\lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = a^{\infty}$

si a > 1 $\quad \lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = \infty$

si a < 1 $\quad \lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = 0$

si a = 1 $\quad \lim_{x\to\infty} [P(x)]^{Q(x)} = 1^{\infty}$ Indeterminació

Ex:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^x = \infty$$ ja que 2^{∞} tendeix a ∞

Indeterminació 1^{∞}. Hi ha expressions que tenen com a límit el nombre e

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{Kx} = e^k$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{P(x)}\right)^{P(x)} = e$$

Quan tenim una indeterminació d'aquest tipus podem transformar l'expressió donada en una de semblant a les anteriors de límit conegut

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{Q(x)}{P(x)})^{\frac{P(x)}{Q(x)}} = e$$ on $\frac{Q(x)}{P(x)}$ tendeix a 0, i la fracció inversa a ∞

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+5}{2x-1})^{\frac{3x^2-2}{x-1}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+5}{2x-1})^{\frac{3x^2-2}{x-1}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2x+5}{2x-1}-1)^{\frac{3x^2-2}{x-1}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{6}{2x-1})^{\frac{3x^2-2}{x-1}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{6}{2x-1})^{\frac{2x-1}{6}}]^{\frac{6}{2x-1}\cdot\frac{3x^2-2}{x-1}} =$$
$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6}{2x-1}\cdot\frac{3x^2-2}{x-1}} = e^9$$

També es pot fer servir la fórmula $\lim_{\substack{x\to\pm\infty \\ x\to a}}(f(x))^{g(x)} = 1^{\infty} = e^{\lim_{\substack{x\to\pm\infty \\ x\to a}}(f(x)-1)\cdot g(x)}$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}} = \left(\frac{2}{2}\right)^{+\infty} = 1^{\infty} \text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}\right)^{\frac{3x^2-5}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5}{2x^2}-1\right)\cdot\frac{3x^2-5}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5-2x^2}{2x^2}\right)\cdot\frac{3x^2-5}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x^2+25}{2x^3}\right)} = e^0 = 1$$

Relació de la continuïtat i el límit d'una funció en un punt

- Una funció f(x) és *continua* en un punt x = c sí

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Es a dir:
f és continua en x = c si es compleixen les tres condicions següents:

a) $\exists \lim_{x \to c} f(x)$
b) $\exists$ f(c)
c) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

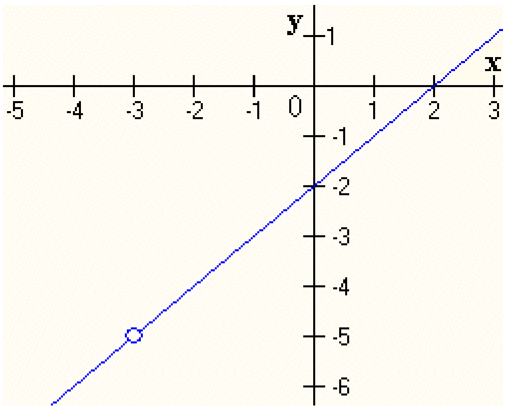
- Una funció és continua si ho és en tots els punts del seu domini. En cas contrari la funció és discontinua.

- Tipus de discontinuïtat:

a) *Evitable*:

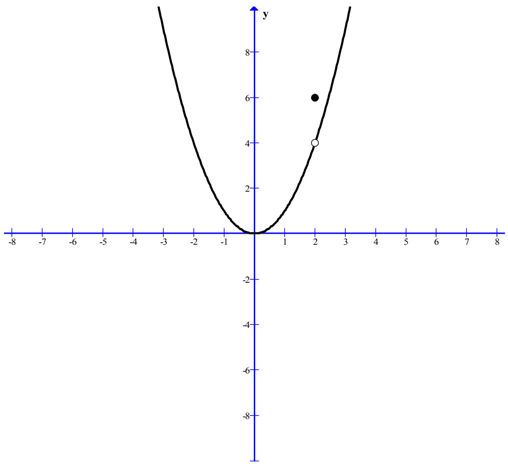
$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim_{x \to c} f(x) \\ \\ \text{Existeix o no } f(c) \end{array}\right\} \text{ però } \lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$

Ex:



Discontinuïtat evitable ("forat") en (-3 , 5)

Ex: Estudieu la continuïtat de la funció següent en x = 2



$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

f(2) = 6

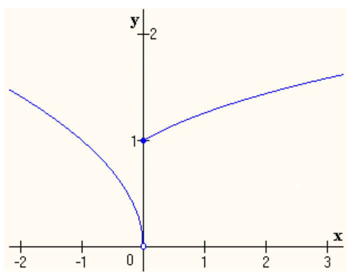
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(4)$$

En x = 2 discontinuïtat evitable

b) *Salt*:

si $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$

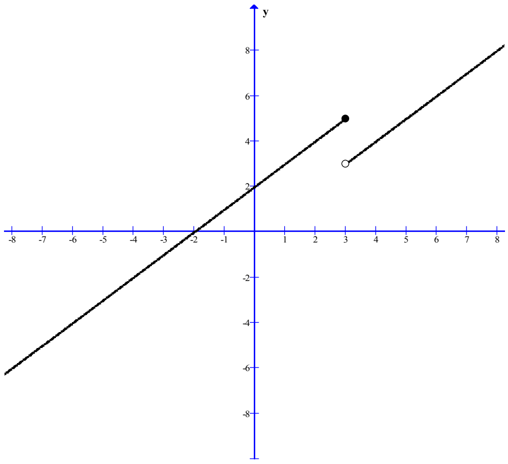
Ex:



Discontinuïtat de salt en x = 0

Ex: Estudieu la continuïtat de la funció següent en x = 3

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

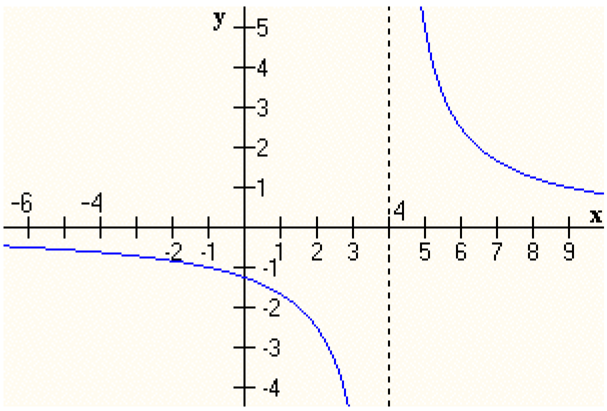


$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x+2) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x) = 3 \\ \text{f(3) = 5} \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 5 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3 \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$$

En x = 3 discontinuïtat de salt

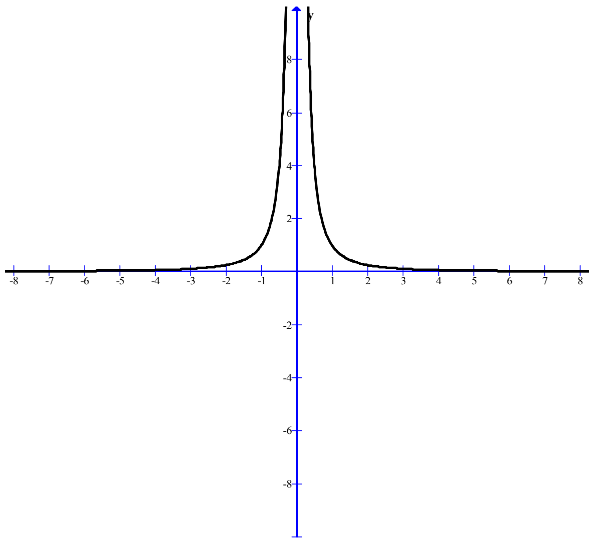
c) *Asimptòtica* : Alguns o els dos límits laterals tendeix a ± ∞

Ex:



Discontinuïtat asimptòtica en x = 4 (asímptota vertical)

Ex: Estudieu la continuïtat de la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en x = 0



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)\,? \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \nexists f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

Discontinuïtat asimptòtica en x = 0

• Per estudiar la continuïtat d'una funció hem de:

a) determinar els possibles punts de discontinuïtat:

- punts on hi ha un canvi de fórmula (funcions definides a trossos)
- punts que no pertanyen al domini. En el cas de funcions definides a trossos hem de veure que la fórmula no presenti cap valor problemàtic i si per aquest s'aplica la fórmula o no.

b) estudiar per cada punt la imatge i el límit de la funció en aquest punt. En el cas de les funcions definides a trossos haurem de estudiar els límits laterals en aquells punts on hi ha un canvi de fórmula

c) determinar el tipus de discontinuïtat

Ex:

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{3x}{x+1} & si \quad x<0 & \rightarrow \quad i) \\ x^2 & si \quad 0\le x\le 4 & \rightarrow \quad ii) \\ \dfrac{2}{3-x} & si \quad x>4 & \rightarrow \quad iii) \end{cases}$$

a) Possibles punts de discontinuïtat:
A nivell de canvis de fórmula hem d'estudiar x=0 i x=4. A nivell de punts que no pertanyen al domini tenim:
i) la fórmula és una fracció algebraica $\rightarrow$ *no tenen imatge (no pertanyen al domini) aquells valors que fan 0 el denominador* $\rightarrow$ *x = -1 és un punt problemàtic*
ii) la fórmula és un polinomi $\rightarrow$ *no hi ha problema*
iii) la fórmula és una fracció algebraica $\rightarrow$ *x = 3 és un punt aparentment problemàtic però, com aquesta expressió es fa servir per valors majors a 4 i no per x = 3, aquest no és un possible punt de discontinuïtat*
Els punts a estudiar són: x = 0, x = 4 i x = - 1.

b)

x = 0 $\quad f(0) = 0^2 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{x+1} = \frac{3\cdot 0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

Com f(0) = $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *la funció és contínua en x=0*

x = 4 $\quad f(4) = 4^2 = 16$

$$\lim_{x\to 4^-} x^2 = 4^2 = 16$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3-4} = -2$$

Com els límits laterals són finits i diferents hi ha una discontinuïtat de salt en x=4

x = -1 $\quad f(-1) = \frac{3(-1)}{-1+1} = \frac{-3}{0} = \infty$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x}{x+1} = \infty$$

Com el límit és infinit hi ha una asímptota vertical a x = - 1