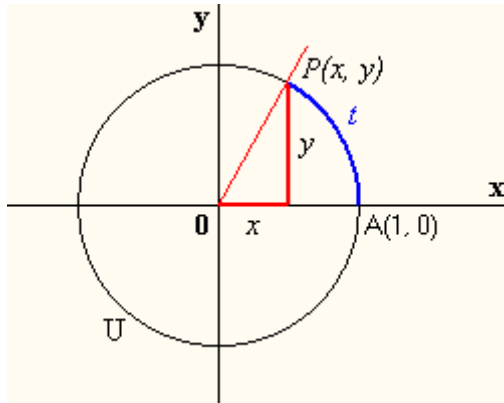


Tema 1: TRIGONOMETRIA

Raons trigonomètriques d'un angle



- | | | |
|---------------------------------------|---|--------------------------------------|
| - sinus (projecció sobre l'eix y) | $\sin \alpha$ | $\sin \alpha \in [-1, 1]$ |
| - cosinus (projecció sobre l'eix x) | $\cos \alpha$ | $\cos \alpha \in [-1, 1]$ |
|
 | | |
| - tangent | $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ | $\tan \alpha \in [-\infty, +\infty]$ |
|
 | | |
| - secant | $\sec \alpha = 1 / \cos \alpha$ | |
| - cosecant | $\operatorname{cosec} \alpha = 1 / \sin \alpha$ | |
| - cotangent | $\operatorname{cotan} \alpha = 1 / \tan \alpha$ | |

• Observacions :

1. Els angles es mesuren en graus i radians ($360^\circ = 2\pi$ radians)
2. Cada angle entre 0° i 360° defineix un punt exclusiu P sobre la circumferència en ser representat, es a dir, té un parell de valors que corresponen al sinus i cosinus que l'identifiquen
3. A un determinat valor de sinus o cosinus sempre corresponen dos angles entre 0° i 360°

Ex: Si observem la taula veiem que els angles de 60° i 120° tenen el mateix valor del sinus però que la parella de valors $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ / $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ és exclusiva de l'angle de 60°

	30°	45°	60°	120°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

4. A partir de les raons trigonomètriques dels angles del primer quadrant es pot deduir les d'angles d'altres quadrants
5. Signe de les raons trigonomètriques segons el quadrant

	1r	2n	3r	4t
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

(Exercicis 1 i 2)

Relacions entre raons trigonomètriques

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \left(\text{a partir d'aquesta i amb la definició de tangent es poden resoldre tots els exercicis} \right)$$

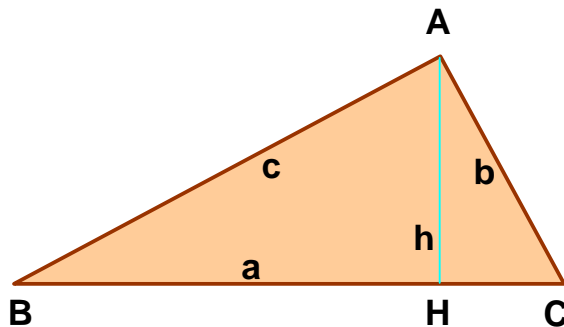
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$$

$$\sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha / (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \quad \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha - 1$$

(Exercicis 3 i 4)

Resolució de triangles

- a) Triangles rectangles



$A = 90^\circ$ a - hipotenusa

$$\sin \alpha = \text{catet oposat} / \text{hipotenusa}$$

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \text{catet contínu} / \text{hipotenusa}$$

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

$$\tan \alpha = \text{catet oposat} / \text{catet continu}$$

$$\tan B = \frac{b}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(Exercici 5)

b) Triangles no rectangles

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{Teorema del sinus}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned} \quad \text{Teorema del cosinus}$$

(Exercicis 6 i 7)

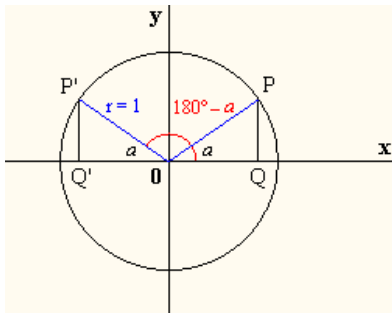
Equacions trigonomètriques

Es tracta d'equacions on la incògnita forma part d'una raó trigonomètrica
Cal modificar l'expressió fins tenir tot en funció d'una sola raó fent servir les fórmules.

(Exercicis 8 i 9)

Exercicis

Exercici 1: Raons trigonomètriques de 150° ?



Per el dibuix veiem que l'angle de 150° (que defineix P') està relacionat amb el de 30° (P) de manera que

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercici 2: Quin angle α té com a $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si $\tan \alpha < 0$?

Sabem que el sinus de 45° és $\frac{\sqrt{2}}{2}$, però en tractar-se d'un angle del primer quadrant la tangent és positiva. Hi ha un altre angle amb el mateix valor del sinus: el de 135° i com està al segon quadrant la seva tangent és negativa.

Exercici 3: Sigui un angle $\alpha \in [\pi, 3\pi/2]$ amb $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$. Trobeu la resta de raons trigonomètriques.

Com $\pi = 180^\circ$ podem deduir que $3\pi/2$ és 270° i que l'angle α és del tercer quadrant, per la qual cosa tindrà sinus negatiu i tangent positiva

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{16} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

però com pertany al tercer quadrant $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha \quad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} : \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\sec \alpha = 1 / \cos \alpha \quad \sec \alpha = 1 : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = 1 / \sin \alpha \quad \operatorname{cosec} \alpha = 1 : -\frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{cotan} \alpha = 1 / \tan \alpha \quad \operatorname{cotan} \alpha = 1 : \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Exercici 4: Si $\tan \beta = -2$ i $3\pi/2 < \beta < 2\pi$ trobar la resta de raons trigonomètriques. De quin angle es tracta ?

Podem aplicar directament les fórmules :

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$\sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha / (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)$$

i des d'aquí trobar

$$\text{el } \cos^2 \alpha = \frac{1}{(-2)^2 + 1} = \frac{1}{5} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{perquè pertany al quart quadrant})$$

$$\text{el sinus } \sin \alpha = \frac{(-2)^2}{(-2)^2 + 1} = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{perquè pertany al quart quadrant})$$

i la resta de raons trigonomètriques

O be fer un sistema d'equacions amb dues incògnites:

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ -2 = \sin \alpha / \cos \alpha \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ -2 \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} (-2 \cdot \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 4 \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \end{aligned}$$

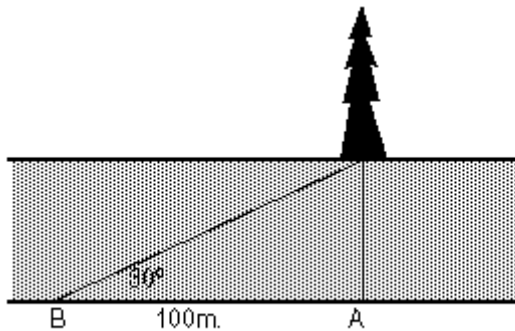
$$\begin{aligned}
5 \cos^2 \alpha &= 1 \\
\cos^2 \alpha &= \frac{1}{5} \\
\cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{quart quadrant}) \\
-2 \cdot \cos \alpha &= \sin \alpha \\
-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} &= \sin \alpha \\
\sin \alpha &= -\frac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

En relació a l'angle observem que el valor $\tan \beta = 2$ no correspon a cap dels angles de 30° , 45° o 60° i farem servir la calculadora per conèixer quin angle té aquest valor de tangent. La calculadora dona com a resultat $-63,43^\circ$

$$\arctan -2 = -63,43^\circ$$

es a dir a un angle de $423,43^\circ$ ($-63,43^\circ + 360^\circ$).

Exercici 5: Des de un punt A en la vorera d'un riu es veu un arbre. Si camines 100 metres per aquesta vora arribes a un punt B des de el que es veu l'arbre sota un angle de 30° (tal com indica la figura). Calcula l'amplada del riu.



Observem que d'aquest triangle rectangle em demanen el catet oposat a l'angle B (que podem anomenar x) i ens donen la longitud del catet continu. La tangent és la que hem relaciona catet oposat i continu,

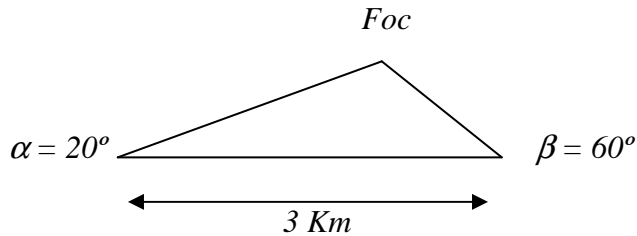
$$\tan 30^\circ = \frac{x}{100}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{100}$$

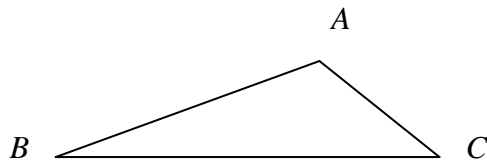
$$1 \cdot 100 = x \cdot \sqrt{3}$$

$$x = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

Exercici 6: Dos estacions de guardaboscós estan separades 3 Km en línia recta. Dos guardaboscós, un a cada estació, observen el fum d'un incendi. Els angles d'observació de l'incendi són de 20° i 60° , l'angle es mesura en relació a la recta que uneix les estacions. Aproximadament, a quina distància de cada guardaboscós es troba l'incendi?



Podem deduir que l'angle que falta és 100° .



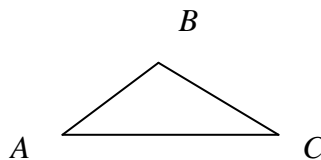
Apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 20^\circ} = \frac{3}{\sin 100^\circ} \quad \overline{AC} = \frac{3 \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ} = 1,042 \text{ Km}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin 100^\circ} \quad \overline{AB} = \frac{3 \sin 60^\circ}{\sin 100^\circ} = 2,638 \text{ Km}$$

Exercici 7: Trobeu els angles d'un triangle de costats 2, 4 i 5 cm



Suposem $\overline{AB} = 2 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 3 \text{ cm}$ i $\overline{AC} = 4 \text{ cm}$

Apliquem el teorema del cosinus

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos C$$

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos C$$

$$\frac{16 - 4 - 9}{-12} = \cos C \quad C = \arccos \frac{3}{-12} = 104,478^\circ$$

Pel teorema del sinus podem conèixer altre angle

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin 104,478^\circ}$$

$$\frac{4}{\sin B} = \frac{2}{\sin 104,478^\circ}$$

$$\sin B = \frac{\sin 104,478^\circ}{2}$$

$$\sin B = 0,484$$

$$B = 28,955^\circ$$

Per trobar A

$$A = 180^\circ - B - C = 46,567^\circ$$

Exercici 8: Resoleu $\cos(x - \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Sabem que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, però com busquem un angle amb valor de cosinus negatiu em de pensar en el 2n i 3r quadrant. De forma semblant a l'exercici 1 podem deduir que

$$\cos 135^\circ = \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

es a dir

$$\begin{array}{lll} x - \pi = 135^\circ & x - 180^\circ = 135^\circ & x = 315^\circ \\ x - \pi = 225^\circ & x - 180^\circ = 225^\circ & x = 405^\circ = 45^\circ \end{array}$$

escriurem

$$x = \begin{cases} 315^\circ + K \cdot 360^\circ \\ 45^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad \text{on } K = 0, 1, 2, \dots$$

Exercici 9: Resoleu $\sin^2 x - 1 = \cos x$

Com $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ tenim $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\sin^2 x - 1 = \cos x$$

$$(1 - \cos^2 x) - 1 = \cos x$$
$$-\cos^2 x - \cos x = 0$$

podem fer un canvi de variable $t = \cos x$

$$-t^2 - t = 0$$
$$-t(t - 1) = 0$$

d'on es pot deduir que

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t - 1 = 0$$
$$t = 1$$

$$\cos x = 0 \quad \cos x = 1$$

$$x = 90^\circ \text{ i } 270^\circ \quad x = 0^\circ$$

$$x = 0^\circ, 90^\circ, 270^\circ + K \cdot 360^\circ \text{ on } K = 0, 1, 2, \dots$$