39 $r: \frac{x-1}{2} = y = z-2$ $\qquad s: \left.\begin{matrix} x-2z=5 \\ x-2y=11 \end{matrix}\right\}$

$\vec{v}_r\,(2,1,1)$

$P_r\,(1,0,2)$

$\vec{v}_s \overset{(*)}{=} (1,0,-2) \wedge (1,-2,0) =$

$= \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k} - 2\vec{j} - 4\vec{i} =$

$= (-4,-2,-2) \equiv$

$\equiv (2,1,1)$

(*):

La recta s ve donada com la intersecció de 2 plans: $x-2z-5=0$ i $x-2y-11=0$. Els vectors normals d'aquests plans són, respectivament, $(1,0,-2)$ i $(1,-2,0)$.

Tenim, doncs, $\vec{v}_r\,(2,1,1)$ i $\vec{v}_s\,(2,1,1)$

Per tant r i s són paral·leles coincidents o paral·leles no coincidents.

Comprovem si $P_r \in s$:

$1 - 2\cdot 2 = -3 \neq 5 \implies P_r \notin s \implies$ r i s són paral·leles no coincidents.

Càlcul de l'equació del pla π que conté r i s:

Prenem com a vectors directors del pla:

$\vec{u} = \vec{v}_r = \vec{v}_s\,(2,1,1)$

i $\vec{w} = \overrightarrow{P_rP_s}$ on P_s és un punt de s. Calculem-lo:

$s: \left.\begin{matrix} x-2z=5 \\ x-2y=11 \end{matrix}\right\}$

Prenem $x=0$

la 1a equació : $z=-5/2$

la 2a equació : $y=-11/2$

Per tant $P_s\left(0,-\frac{11}{2},-\frac{5}{2}\right)$ i $\overrightarrow{P_rP_s}\left(-1,-\frac{11}{2},-\frac{9}{2}\right)\equiv$

L'equació del pla $\Pi\,(P_r,\vec{u},\vec{w})$ $\equiv(2,11,9)$

$$\Pi:\begin{cases} x=1+2\lambda+2\mu \\ y=\lambda+11\mu \\ z=2+\lambda+9\mu \end{cases}$$

42) Apartat a

$\Pi\,((0,0,3),\vec{u},\vec{v})$

observem que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són l.i.

Calculem el vector normal a Π, $\vec{n}$

$$\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -5\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=-6\vec{i}+\vec{k}-10\vec{j}-4\vec{k}+5\vec{i}+3\vec{j}=$$

$$=-\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}\equiv(-1,-7,-3)$$

Així l'equació general de Π és de la forma:

$$-x-7y-3z+D=0$$

Com $(0,0,3)\in\Pi$

Tenim: $-9+D=0 \iff D=9$

Així l'equació general de Π és:

$$-x-7y-3z+9=0$$

43 1a manera

Sigui $M' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} m & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m & 1 \end{array}\right) \end{array}$

Triangulem les matrius pel mètode de Gauss:

$$M' \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_2 & C_3 & C_1 & C_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & m & 1 \\ -1 & m & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} F_1 \\ 3F_1+F_2 \\ F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 9+m & 4 \\ 0 & m & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-mF_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 9+m & 4 \\ 0 & 0 & -m^2-9m+10 & 4-4m \end{array}\right)$$

$9+m=0 \iff m=-9$

$-m^2-9m+10=0 \iff \begin{cases} m=-10 \\ m=1 \end{cases}$

$m = \dfrac{9 \pm \sqrt{81+40}}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} -10 \\ 1 \end{array} \right.$

Si $m=-9$ $\quad M' \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{array}\right)$

Rang M = Rang M' = nº incògn. = 3 $\Rightarrow$ Sist C.D $\Rightarrow$

Thm Rouché-Frobenius

$\Rightarrow$ π i r són secants.

Si $m = -10$

$$M' \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{array}\right)$$

Rang $M = 2 \neq 3 = $ Rang $M' \Rightarrow$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tma de Rouché-Frobénius}}}{\Rightarrow}$ Sist Incomp $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ r i Π són paral·lels.

Si $m = 1$

$$M' \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang $M = $ Rang $M' = 2 < \underset{\substack{\parallel \\ 3}}{n\text{-incogn}}$

~~Pel~~ Tma de Rouché-Frobénius

Sist C.I amb un grau de llibertat $\Rightarrow$

$\Rightarrow r \subset \Pi$

Observem:

Si $m \neq -9$ i -10 i 1 Rang $M = $ Rang $M' = 3 = n$ incogn.

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tma de R-F}}}{\Longrightarrow}$ Sist C.D. $\Rightarrow$ r i Π secants.

Per tant:

Si $m \neq -10$ i $m \neq 1$: r i Π secants.

Si $m = -10$: $r \parallel \Pi$

Si $m = 1$: $r \subset \Pi$

2a. manera

Sigui $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m & 1 \end{array}\right)$

Calculem el rang de les matrius M i M' utilitzant determinants:

rang M:
$$\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 6 - 4 + 9m$$

$$m^2 + 9m - 10 = 0$$

$$m = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{2} < \begin{matrix} 1 \\ -10 \end{matrix}$$

Per tant:

Si $m \neq 1$ i $m \neq -10$ rang M = rang M' = n=incògn. = 3 i per tant, pel teo de Rouchée-Fröbenius CD ⇒ Π i r secants

Si $m = 1$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$|1| \neq 0 \Rightarrow$ Rang $M \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 = 10 \neq 0 \Rightarrow$ Rang $M = 2$

$\boxed{m = 1 \ \text{Rang}\ M < 3}$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 1-3-6-2+1+9=0$$

$$m=1 \quad |M|=0$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Rang } M'=2$$

Per tant: $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incogn.} = 3 \underset{\text{Tma R-F.}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ Sist C.I amb 1 grau de llibertat $\Rightarrow r \subset \Pi$

Si $m=-10$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

$|1| \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2$

$\boxed{m=-10 \quad \text{Rang } M < 3}$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -10 & 1 \end{vmatrix} = -10-2-30-2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3$$

Per tant $\text{Rang } M = 2 \neq 3 = \text{Rang } M' \underset{\text{Tma R-F.}}{\Longrightarrow}$ Sist I $\Rightarrow r \parallel \Pi$

Així, doncs:
$m=1 \quad r \subset \Pi$
$m=-10 \quad r \parallel \Pi$
$m \neq 1$ i $m \neq -10$ $\quad r$ i Π secants.

3a manera

De l'equació de Π obtenim que $\vec{n}(m, -3, 2)$ és vector normal a Π.

De l'equació de r obtenim que el vector director de r és:

$$\vec{v} = (3, 1, 0) \wedge (2, -1, m) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = m\vec{i} - 3\vec{k} - 2\vec{k} - 3m\vec{j} \equiv (m, -3m, -5)$$

Π i r són paral·lels $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m, -3, 2) \cdot (m, -3m, -5) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 9m - 10 = 0$

$$m = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 40}}{2} \begin{cases} 1 \\ -10 \end{cases}$$

Si substituim $x = 0$ en la 1a equació de la recta r, tenim que $y = 1$. Substituint aquests dos valors en la 2a equació obtenim: $z = \frac{2}{m}$ $\underline{\underline{m \neq 0}}$

Per tant $P\left(0, 1, \frac{2}{m}\right)$ és un punt de la recta r si $m \neq 0$.

Si $m = 1$: $P(0, 1, 2)$ $\Pi: x - 3y + 2z = 1$

substituim les coordenades de P en l'equació de Π: $-3 + 4 = 1$

Per tant, $\left.\begin{array}{l} P \in \Pi \\ \Pi \text{ i r paral·lels} \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \Pi$

8

<u>Si $m=-10$</u> : $P\left(0, 1, -\frac{1}{5}\right)$ $\Pi: -10x-3y+2z=1$

Substituïm les coordenades de P en l'equació de Π:

$$-3-\frac{2}{5}=-\frac{17}{5}\neq 1$$

Per tant $\left.\begin{array}{l} P\notin\Pi \\ \Pi \text{ i } r \text{ paral·lels}\end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \Pi$

<u>Si $m\neq-10$ i $m\neq 1$</u> Π i r secants.

<u>En resum</u> : $m=1$: $r\subset\Pi$

$m=-10$: $r\parallel\Pi$

$m\neq 1$ i $m\neq -10$: r i Π secants.