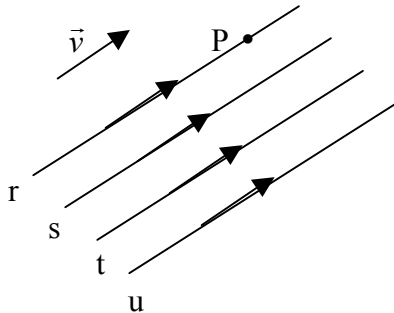


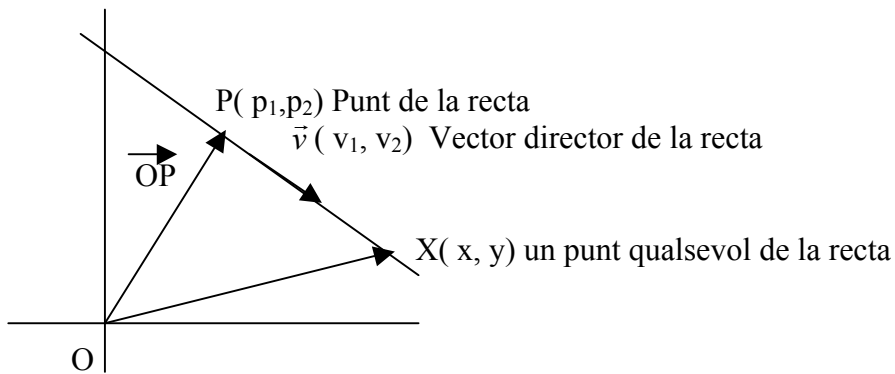
TEMA 2 : Geometria analítica en el pla. Recta

2.7 EQUACIONS DE LA RECTA



Totes les rectes tenen la direcció del vector \vec{v} , però només la recta r passa per el punt P.

Per tant una recta queda determinada per un punt i un vector director.



Del dibuix es dedueix que : $\vec{OX} = \vec{OP} + k \cdot \vec{v}$

En coordenades : $(x, y) = (p_1, p_2) + k \cdot (v_1, v_2)$ Equació vectorial de la recta

Desenvolupant:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + k \cdot v_1 \\ y &= p_2 + k \cdot v_2 \end{aligned}$$

Equació paramètrica de la recta

Aïllant la k de totes dues equacions:

$$k = \frac{x - p_1}{v_1}$$

$$k = \frac{y - p_2}{v_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \quad \text{Equació continua de la recta}$$

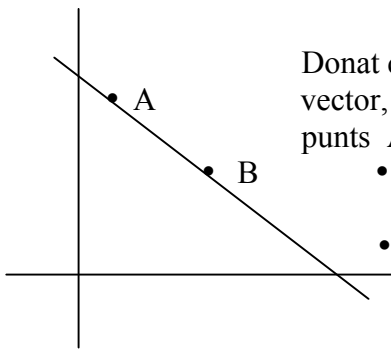
Multiplicant en creu l'expressió anterior i agrupant termes:

$$\begin{aligned}
 v_2 \cdot (x - p_1) &= v_1 \cdot (y - p_2) \\
 v_2 \cdot x - v_2 \cdot p_1 &= v_1 \cdot y - v_1 \cdot p_2 \\
 \underbrace{v_2 \cdot x}_A - \underbrace{v_1 \cdot y}_B + \underbrace{v_1 \cdot p_2 - v_2 \cdot p_1}_C &= 0
 \end{aligned}$$

$Ax + By + C = 0$	<u>Equació general o implícita de la recta</u>
-------------------	--

$\vec{v} (v_1, v_2) = (-B, A)$ vector director de la recta

2.7.1 Recta que passa per dos punts



Donat que una recta queda determinada per un punt i un vector, per trobar l'equació d'una recta que passa per dos punts A i B simplement:

- Agafem com a punt A o B indistintament
- Agafem com a vector director \vec{AB} o \vec{BA}

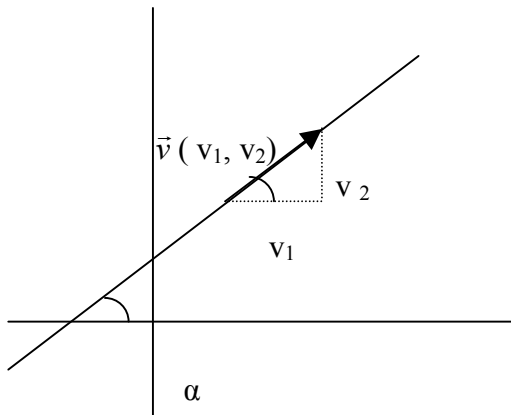
NOTA

Si no ens demanen cap equació en particular, en general cal trobar l'equació general o implícita.

2.7.2. Equació explícita de la recta. Pendent de la recta.

L'equació explícita és aquella que ve donada per l'expressió $y = m \cdot x + n$, on m

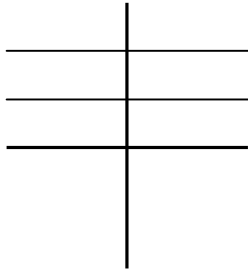
representa la pendent de la recta (inclinació) i n l'ordenada en el origen (on talla la recta a l'eix OY)



Per calcular la pendent:

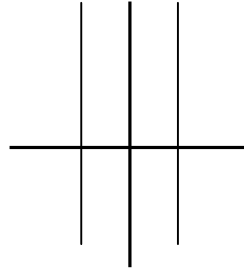
- aïllada la y el que acompanya a l'x
- $m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1}$

2.7.2 Rectes paral·leles als eixos



Recta paral·lela a l'eix OX

$$y = b$$



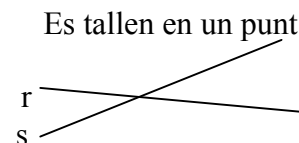
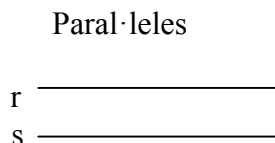
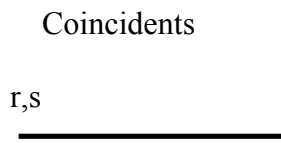
Recta paral·lela a l'eix OY

$$x = a$$

2.8 POSICIÓ RELATIVA DE DUES RECTES

Donades dues rectes en equació implícita, $r : Ax + By + C = 0$ i $s : A'x + B'y + C' = 0$

Ens podem trobar amb els casos següents:



El sistema format per les equacions:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

te ∞ solucions

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

no te solució

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

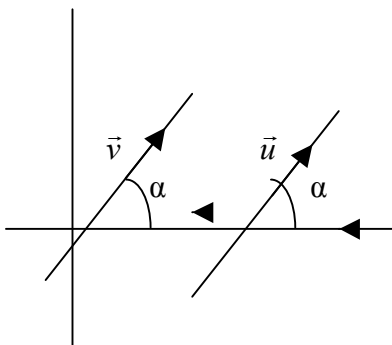
te 1! Solució

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

2.9. PARAL·LELISME DE RECTES



Si dues rectes r i s són paral·leles: $r \parallel s$

a) Els vectors directores tenen la mateixa direcció

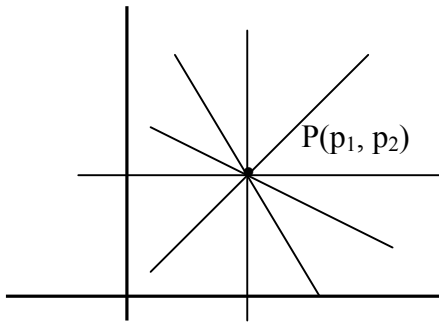
$$r \parallel s \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

b) Les dues rectes tenen la mateixa pendent $m_r = m_s$

c) Les equacions generals compleixen que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

2.10 FEIX DE RECTES QUE PASSEN PER UN PUNT

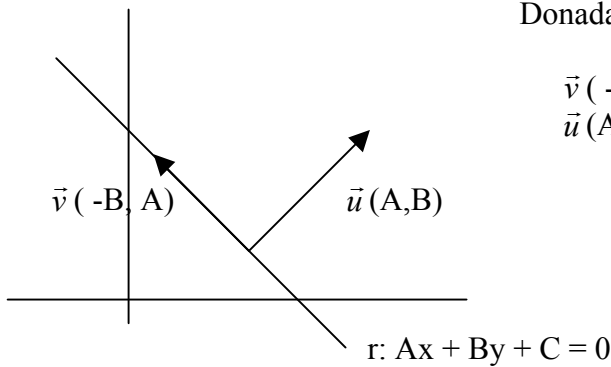


Per un punt passen infinites rectes que formen el feix de rectes d'aquell punt i l'equació del feix de rectes és

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1)$$

2.11 RECTES PERPENDICULARS

2.11.1 Vector normal a una recta



Donada la recta d'equació $r: Ax + By + C = 0$

$\vec{v}(-B, A)$ és vector director de la recta i
 $\vec{u}(A, B)$ és vector perpendicular a la recta

EXEMPLE

Donada la recta d'equació $r: 3x + y + 5 = 0$, trobeu un vector director i un altre normal a la recta

vector director de la recta $\vec{v}(-B, A) = (-1, 3)$
vector perpendicular a la recta $\vec{u}(A, B) = (3, 1)$

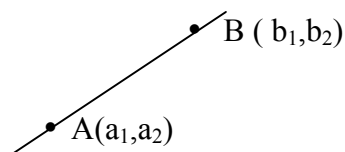
2.11.2. Rectes perpendiculars

$$a) r \perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$

$$b) r \perp s \Leftrightarrow m_s = \frac{-1}{m_r}$$

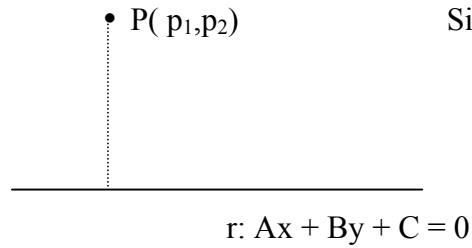
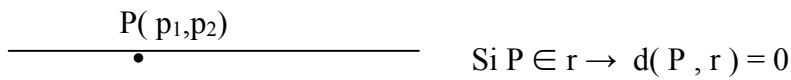
2.12. DISTÀNCIES

2.12.1 Distància entre dos punts



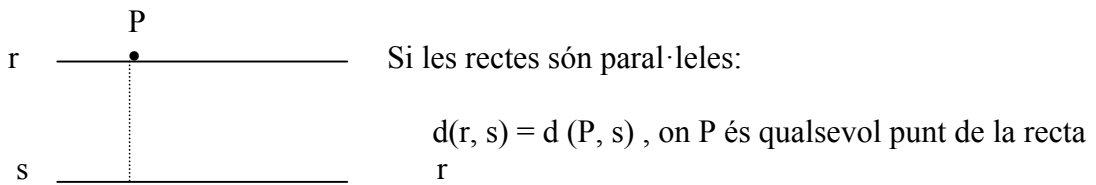
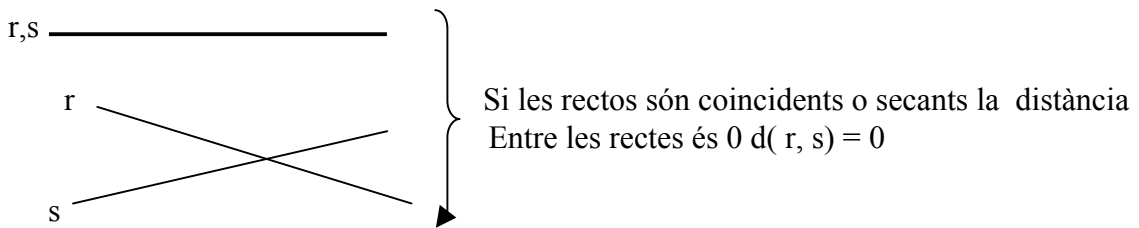
$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

2.12.2 Distància d'un punt a una recta

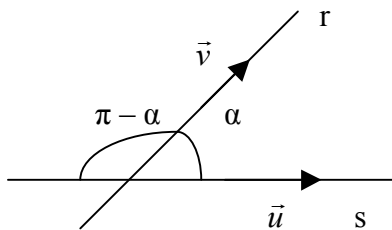


$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.12.3 Distància entre dues rectes



2.13 ANGLE DE DUES RECTES

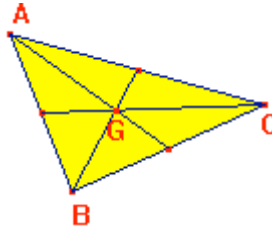


$$\alpha(r, s) = \alpha(\vec{v}, \vec{u})$$

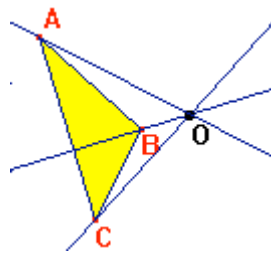
$$\alpha(r, s) \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

2.14 PUNTS NOTABLES D'UN TRIANGLE

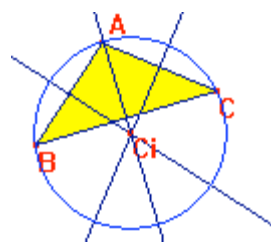
- *Baricentre* d'un triangle és la intersecció de les tres medians.
Una *mediana* d'un triangle és la recta que va des d'un vèrtex al punt mitja del costat oposat



- *Ortocentre* d'un triangle és el punt d'intersecció de les tres altures.
Una *altura* es la recta perpendicular a un costat que passa pel vèrtex oposat



- *Circumcentre* d'un triangle és la intersecció de les tres mediatriss.
Una *mediatriu* és la recta perpendicular a un costat pel punt mig



- *Incentre* d'un triangle és la intersecció de les tres bisectrius.
Una *bisectriu* es la recta que divideix cada angle en dos d'iguals

