

TEMA 2 : Geometria analítica en el pla. Vectors

2.1 VECTORS

2.1.1 Magnituds escalars i magnituds vectorials

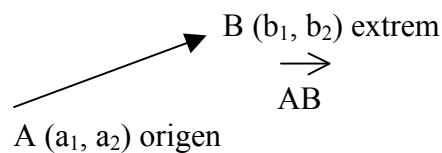
- La magnitud escalar és aquella que queda determinada per un nombre
- La magnitud vectorial és aquella que no queda determinada per un nombre, cal especificar la direcció i el sentit.

EXMPLES

El temps, el pes,... són magnituds escalars
La força, és una magnitud vectorial.

2.1.2 Vectors

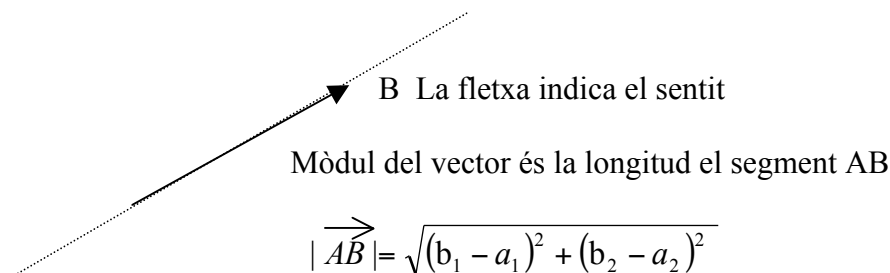
- a) Un vector és un segment orientat



- b) Components d'un vector : Coordenades del extrem – coordenades de l'origen

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

- c) Mòdul, direcció i sentit d'un vector



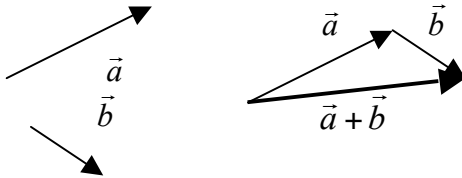
A La direcció del vector ve determinada per la recta que el conté

- d) Vector equipol·lents són aquells que tenen la mateixa direcció, mòdul i sentit (tenen les mateixes components)
- e) Un vector és fix quan el seu origen (A) i el seu extrem (B) són coneguts, es representen per \vec{AB}
- f) Un vector és lliure si només es coneix les components, no l'origen ni l'extrem, es representa amb una lletra minúscula \vec{v}

2.2 OPERACIONS AMB VECTORS

2.2.1 Suma de vectors

Gràficament



En components :

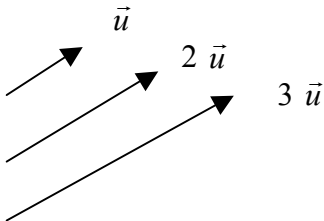
$$\vec{a} (a_1 , a_2) \quad \vec{b} (b_1 , b_2)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2)$$

Propietats :

- Commutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Vector neutre o nul: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Vector oposat : $-\vec{u}$: és un vector amb el mateix mòdul mateixa direcció i sentit contrari
 $\vec{u} (u_1 , u_2) \rightarrow -\vec{u} (- u_1 , - u_2)$

2.2.2 Producte d'un vector per un nombre



El producte d'un nombre k per un vector \vec{u} és un altre vector $k \cdot \vec{u}$ que presenta:

- La mateixa direcció que \vec{u}
- Si $k > 0$ el mateix sentit que \vec{u}
- Si $k < 0$ sentit contrari que \vec{u}
- $|k \cdot \vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$ (k vegades el mòdul de \vec{u})
- Components: $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1 , k \cdot u_2)$

2.3 BASE DE VECTORS DEL PLA

2.3.1 Combinació lineal de vectors

- Dos vectors \vec{u} i \vec{v} són linealment dependents si tenen la mateixa direcció, es a dir, si existeix un nombre k tal que

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \rightarrow \text{les seves components són proporcionals}$$
$$(u_1, u_2) = (k \cdot v_1; k \cdot v_2).$$

Quan dos vector no tenen la mateixa direcció es diu que són linealment independents.

- Si existeixen dos nombre reals n i m tal que : $\vec{w} = n \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v}$, diem que el vector \vec{w} és combinació lineal de \vec{u} i \vec{v}

2.3.2 Base de Vectors en el pla

Diem que un conjunt de vectors és una base si :

- Són linealment independents
- Qualsevol vector es pot posar com a combinació lineal d'aquests vectors

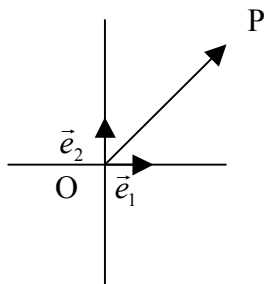
NOTA

En el pla una base sempre està formada per dos vectors linealment independents.

2.3.3 Components d'un vector en una base

Fixada una base $B = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$, qualsevol vector w es pot expressar com a combinació lineal de \vec{u} i \vec{v} : existeixen m, n nombres reals tal que : $\vec{w} = n \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v}$. Els nombres m i n s'anomenen components del vector en aquesta base.

2.3.4 Sistema de Referència ortonormal



Fixem un punt del pla com origen de coordenades $O(0, 0)$

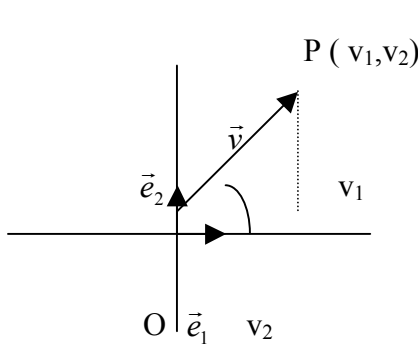
Base de vectors $B = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ dos vector perpendiculars i de mòdul

El conjunt $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ és un sistema de referència ortonormal.



\vec{OP} s'anomena vector de posició del punt P

2. 4. MÒDUL I ARGUMENT D'UN VECTOR



$$\vec{OP} = \vec{v} (v_1, v_2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Argument:

$$\alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

$$v_1 = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$v_2 = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$

NOTA

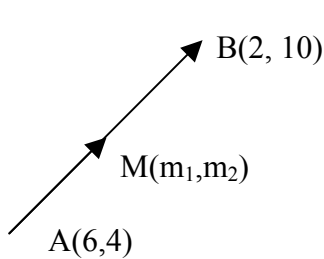
Si el vector \vec{v} no és unitari, $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ és un vector unitari amb la mateixa direcció i sentit que \vec{v}

2.5 APLICACIONS GEOMETRIQUES DELS VECTORS

2.5.1 Divisió d'un segment amb parts iguals

EXEMPLES

a) Trobeu el punt M, que divideix el segment d'extremes A(6, 4) i B(2, 10) en dos parts iguals.

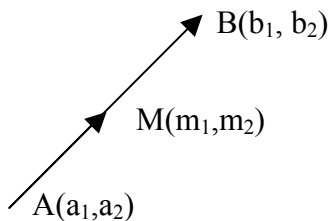


$$\vec{AB} = 2 \cdot \vec{AM}$$

$$(-4, 6) = 2 \cdot (m_1 - 6, m_2 - 4)$$

$$\begin{cases} -4 = 2m_1 - 12 \rightarrow m_1 = 4 \\ 6 = 2m_2 - 8 \rightarrow m_2 = 7 \end{cases}$$

Punt mig d'un segment

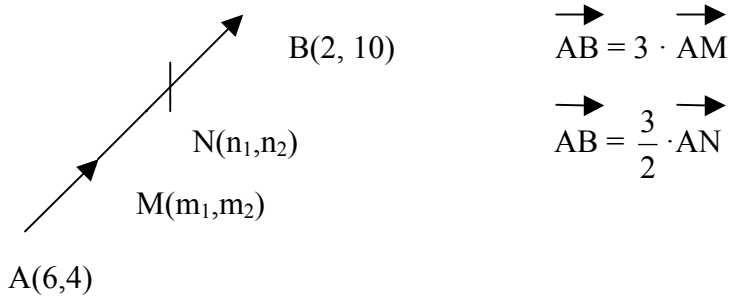


$$\vec{AB} = 2 \cdot \vec{AM}$$

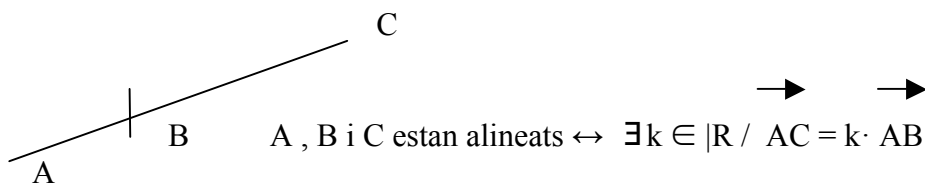
$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 2 \cdot (m_1 - a_1, m_2 - a_2)$$

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 2m_1 - 2a_1 \rightarrow m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \\ b_2 - a_2 = 2m_2 - 2a_2 \rightarrow m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \end{cases}$$

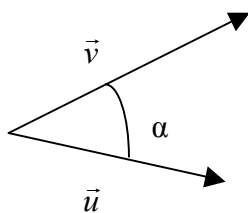
b) Trobeu els punts M i N, que divideix el segment d'extremes A(6, 4) i B(2, 10) en tres parts iguals.



2.5.2. Punts alineats



2. 6 PRODUCTE ESCALAR DE VECTORS



Donat dos vectors \vec{u} i \vec{v} anomenem producte escalar de \vec{u} i \vec{v} al nombre que resulta de:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

2.6.1 Teorema

Si \vec{u} i \vec{v} són vectors no nuls tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Demostració:

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \\ |\vec{u}| \neq 0 \neq |\vec{v}| \end{array} \right\} \rightarrow \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\Leftarrow \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \cos \alpha = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 = 0$$

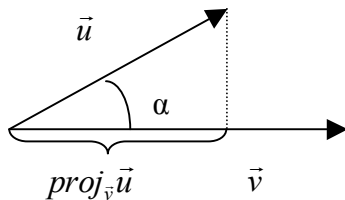
2.6.2 Propietats del producte escalar v_2

- a) Commutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- b) Associativa del producte de un nombre : $\alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$
- c) Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

2.6.2 Expressió analítica del producte escalar

En una base ortonormal si $\vec{u}(u_1, u_2)$ i $\vec{v}(v_1, v_2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

2.6.3 Projectió ortogonal d'un vector sobre un altre



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{proj_{\vec{v}} \vec{u}}{|\vec{u}|} \rightarrow proj_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{proj_{\vec{v}} \vec{u}}{|\vec{u}|}$$

NOTA

Si $\vec{v}(a, b) \rightarrow \vec{u}(-b, a)$ es ortogonal a \vec{v} , ja que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (-b, a) = -a \cdot b + a \cdot b = 0$

2.6.4 Angle de dos vectors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$