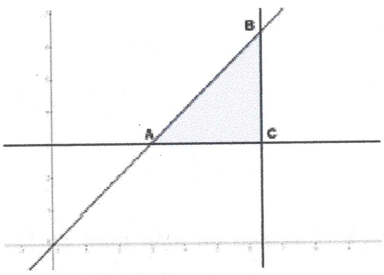
5 **1.** Una refineria de petroli produeix gasolina i gasoil. En el procés de refinació que s'hi porta a terme s'obté més gasolina que gasoil. A més, per a cobrir la demanda cal produir com a mínim 3 milions de litres de gasoil al dia, mentre que la demanda de gasolina és de 6,4 milions de litres al dia, com a màxim.
La gasolina té un preu d'1,9 €/L, i el gasoil val 1,5 €/L. Tenint en compte que es ven la totalitat de la producció, determineu quants litres de gasolina i de gasoil cal produir al dia per a obtenir el màxim d'ingressos. [2 punts] 2015_S2_6



Anomenarem x als milions de litres de gasolina, i y als milions de litres de gasoil. Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{c} x \geq y \\ y \geq 3 \\ x \leq 6{,}4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$. La funció objectiu serà, en milions d'euros, $I(x,y)=1{,}9x+1{,}5y$. Els vèrtexs són: A(3,3), B(6.4,6.4) i C(6.4,3). Els ingressos respectius són: $I(A)=10{,}2$, $I(B)=21{,}76$, $I(C)=16{,}6$. Per tant, el màxim benefici s'obtindrà amb la producció de 6,4 milions de litres de cada tipus de carburant.

Una altra interpretació és considerar $x>y$. En aquest cas no existeix màxim de I(x,y) a la regió factible.

12 **2.** Considereu el triangle de vèrtexs $A(-2, 0)$, $B(0, 3)$ i $C(2, -1)$.
***a*)** Determineu les condicions que ha de complir un punt per a no ser fora del triangle. [1 punt]
***b*)** Justifiqueu analíticament si els punts $P(1, 1)$, $Q(-1, 1)$ i $R(-1, 2)$ són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle. [1 punt] 2015_S4_6

Recta AB: $y=\frac{3}{2}x+3$. Recta BC: $y=-2x+3$. Recta AC: $y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$. Per tant, cal que es verifiqui:

$$\left.\begin{array}{l} y \leq \frac{3}{2}x+3 \\ y \leq -2x+3 \\ y \geq -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

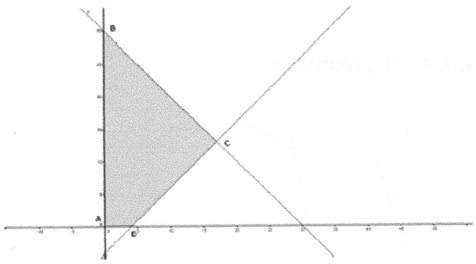
b. Justifiqueu analíticament si els punts P(1,1), Q(-1,1) i R(-1,2) són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle. [1 punt]

L'interior del triangle està format pels punts que verifiquen

- P pertany a la recta BC.
- Q verifica les tres inequacions. Per tant, és interior al triangle.
- R no verifica la primera inequació. Per tant, és exterior al triangle.

9 **8.** Tinc un problema: fabrico televisors de LED, que em deixen un benefici de 100 € cadascun, i televisors de plasma, que em donen la meitat de benefici unitari. No puc produir més de 30 televisors al dia, i la diferència entre la producció dels de LED i els de plasma és, com a màxim, de quatre unitats. Quants n'he de produir de cada classe per a guanyar el màxim? [2 punts] 2013_S3_6

Si anomenem x al nombre de televisors LED que fabrico i y al nombre de televisors de plasma, les inequacions que defineixen la regió factible de la figura són les següents:



$$\left.\begin{array}{r} x+y \le 30 \\ x-y \le 4 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

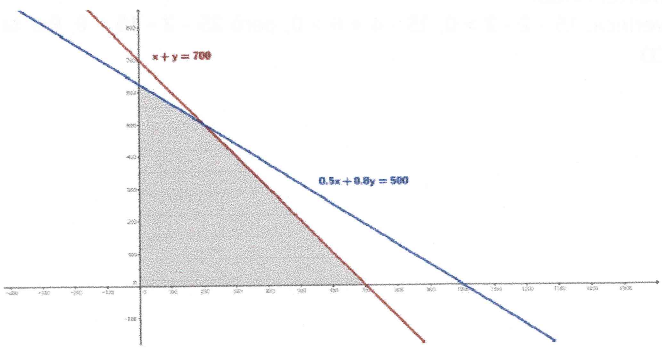
Els vèrtexs de la regió factible són A(0,0), B(0,30), C(17,13), D(4,0). La funció objectiu és $F(x)=100x+50y$. Els valors de la funció objectiu en aquests vèrtexs és F(A)=0, F(B)=1500, F(C)=2350, F(D)=400. Per tant, per a guanyar el màxim cal produir 17 TV LED i 13 TV de plasma.

10 **9.** Un botiguer va al mercat central amb la seva furgoneta, que pot carregar 700 kg, i amb 500 € a la butxaca, a comprar fruita per a la seva botiga. Hi troba pomes a 0,80 €/kg i taronges a 0,50 €/kg. Calcula que podrà vendre les pomes a 0,90 €/kg i les taronges a 0,58 €/kg. Quina quantitat de pomes i de taronges li convé comprar si vol obtenir el benefici més gran possible? [2 punts] 2013_S4_5

Si anomenem x i y a les quantitats de taronges i de pomes respectivament que comprarà, les dades es tradueixen en les inequacions:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \le 700 \\ 0{,}5x+0{,}8y \le 500 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\},$$

mentre que els guanys vindran donats per la funció $B(x,y)=0{,}08x+0{,}1y$. Dibuixant les dades del problema obtindrem:

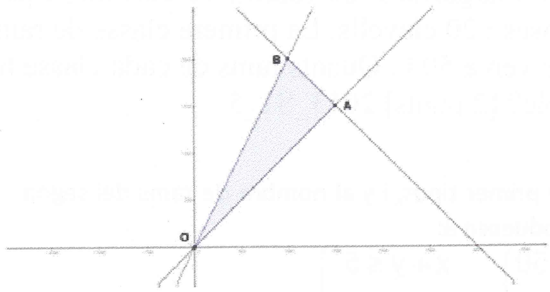


Els vèrtexs del quadrilàter són, en sentit horari, (0,0), (0,625), (200,500), (700,0). Els guanys corresponents són: G(0,0) = 0, G(0,625) = 62,5, G(200,500) = 66, G(700,0) = 56. Per tant, els màxims beneficis s'obtenen comprant 200 kg de taronges i 500 kg de pomes.

6

5. Una empresa d'informàtica fabrica ordinadors portàtils i de taula i ven tots els que fabrica. L'empresa té capacitat per a fabricar 3.000 ordinadors. Per qüestions de mercat, el nombre d'ordinadors de taula no pot ser inferior a la meitat del nombre de portàtils, però tampoc no pot superar el nombre de portàtils. L'empresa guanya 100 € per cada ordinador de taula, i un 20 % més en la venda de cada portàtil. Quants ordinadors de cada classe ha de fabricar per a maximitzar els beneficis? 2014_S4_2

Anomenarem x al nombre d'ordinadors de sobretaula, i y al de portàtils. Les restriccions que imposa el problema seran, doncs,



$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 3000 \\ x\ge \dfrac{y}{2} \\ x\le y \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

La representació gràfica de la regió factible és la que es veu al costat. Els seus vèrtexs són: O(0,0), A(1500,1500), B(1000,2000). La funció que ens dóna els guanys de l'empresa serà $G(x,y)=100x+120y$ que avaluada en els vèrtexs, ens dóna:

$$G(0,0)=0$$
$$G(1500,1500)=330000$$
$$G(1000,2000)=340000$$

Per tant, els màxims guanys s'obtenen produint 1000 ordinadors de sobretaula i 2000 portàtils.

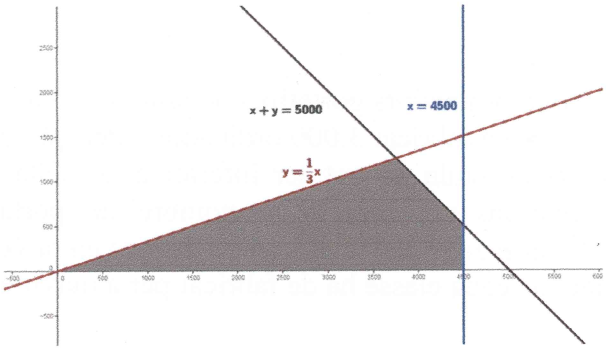
7

6. Una companyia aèria programa una oferta d'un màxim de 5.000 places, entre classe turista i preferent. Per cada plaça de classe turista obté uns guanys de 30 €, mentre que per cada plaça de classe preferent el benefici és de 40 €. Per raons tècniques, no és possible oferir més de 4.500 places de classe turista, i el nombre de places de classe preferent no pot superar la tercera part de les de classe turista. Calculeu quantes places de cada classe cal oferir per a maximitzar els guanys. 2014_S5_5

Si anomenem x al nombre de places en classe turista, i y les de preferent, les condicions del problema es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 5000 \\ x\le 4500 \\ y\le \dfrac{1}{3}x \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\},$$

i els beneficis responen a la funció B(x) = 30x + 40y. Dibuixant les dades del problema obtindrem:

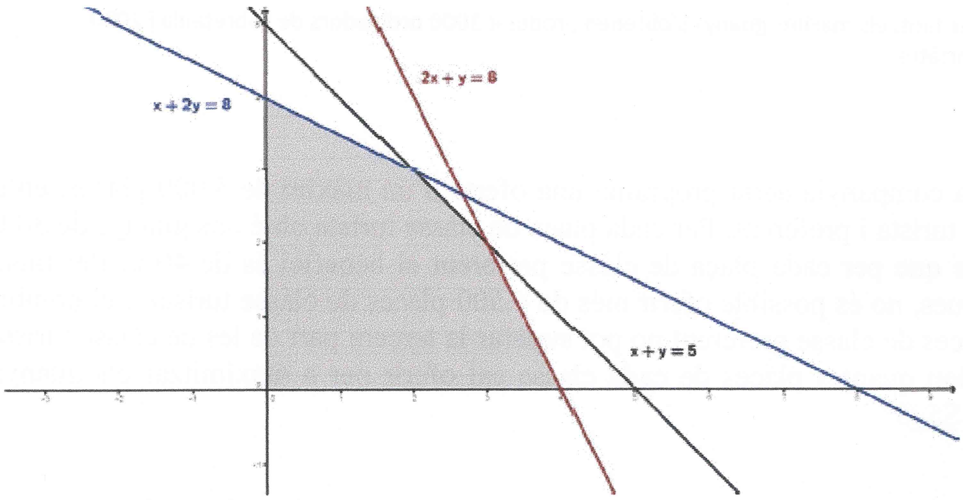


(8) **7.** Un florista disposa de 50 margarides, 80 roses i 80 clavells, i en fa rams de dues classes: per a uns fa servir 10 margarides, 20 roses i 10 clavells, i per als altres fa servir 10 margarides, 10 roses i 20 clavells. La primera classe de rams es ven a 40 €, mentre que la segona es ven a 50 €. Quants rams de cada classe ha de fer si vol ingressar el màxim possible? [2 punts] 2013_S1_5

Si anomenem x al nombre de rams del primer tipus, i y al nombre de rams del segon tipus, les condicions del problema es tradueixin a:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+10y \le 50 \\ 20x+10y \le 80 \\ 10x+20y \le 80 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y \le 5 \\ 2x+y \le 8 \\ x+2y \le 8 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

Dibuixant les dades del problema obtenim:



Els cinc vèrtexs són, en sentit horari: (0,0), (0,4), (2,3), (3,2) i (4,0). Els beneficis corresponen a la funció objectiu B(x,y) = 40x + 50y. En cada cas els beneficis són B(0,0) = 0, B(0,4) = 200, B(2,3) = 230, B(3,2) = 220, B(4,0) = 160. Per tant, els ingressos més grans s'obtenen fabricant 2 rams del primer tipus i 3 del segon tipus.

<u>Criteris de correcció</u>: Plantejament de les inequacions: 1 p. Càlcul dels vèrtexs: 0.5 p. Dibuix: 0.25 p. Càlcul del valor màxim: 0,25 p.