TEMA 2: Polinomis

2.1 DEFINICIONS:

- Anomenarem **monomi** qualsevol expressió algèbrica formada per la multiplicació d'un nombre real i d'una variable elevada a un exponent natural.
- El nombre es diu **coeficient** i la variable elevada a l'exponent natural es diu **part literal**.
- Anomenarem **grau** del monomi a l'exponent de la variable

EXEMPLE

Part literal

$$\text{coeficient} \leftarrow 3\, x^{5} \rightarrow \text{grau}$$

- Anomenarem **binomi** a la suma de dos monomis de diferent grau
- Anomenarem **trinomi** a la suma de tres monomis de diferent grau
- Anomenarem **polinomi** a l'expressió que resulti de sumar monomis de diferents graus

EXEMPLE

a) $2x^2 – 5\,x^4$ és un binomi de grau 4
b) $3t^5 – 2t^2 + 4$ és un trinomi de grau 5
c) $8z – 2z^3 + 3z^2 – 10$ és un polinomi de grau 3

En general un polinomi és una expressió algèbrica que resulta de sumar monomis de diferents graus.

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

El **grau** és n i el **terme independent** és a_0

2.2 VALOR NUMÈRIC D'UN POLINOMI:

Donat un polinomi P(x), si substituïm la variable x per un nombre i en calculem el resultat, obtindrem un altre nombre que anomenarem **valor numèric del polinomi**.

EXEMPLE

Donat el polinomi $P(x) = 2x^3 – 4x^2 + 5x – 2$, Calcula el valor numèric del polinomi en:

a) $x = -2 \rightarrow P(-2) = 2(-2)^3 – 4(-2)^2 + 5(-2) – 2 = -16 – 16 – 10 – 2 = -44$
b) $x = 0 \rightarrow P(0) = 2\cdot 0^3 – 4\cdot 0^2 + 5\cdot 0 – 2 = -2$
c) $x = 2 \rightarrow P(2) = 2\cdot 2^3 – 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2 – 2 = 16 – 16 + 10 – 2 = 8$

2.3 OPERACIONS AMB POLINOMIS:

2.3.1 Suma i resta de polinomis:

Per sumar (restar) dos polinomis ho podem fer de dues maneres:

a) Posem un polinomi a sota l'altre (deixant un buit quan no tingui el monomi corresponent) i sumem (restem) els monomis amb el mateix grau.

b) Aparellem els monomis que tinguin el mateix grau de desprès sumem (restem).

EXEMPLE

1. Suma els polinomis $P(x) = 10x^4 - 7x^3 - 8x + 5$ i $Q(x) = -12x^4 + 3x^2 + 7x - 12$

a)
$$\begin{array}{rrrrr} 10x^4 & -7x^3 & & -8x & +5 \\ -12x^4 & & +3x^2 & +7x & -12 \\ \hline -2x^4 & -7x^3 & +3x^2 & -x & -8 \end{array}$$

b) $(10x^4 - 7x^3 - 8x + 5) + (-12x^4 + 3x^2 + 7x - 12) =$
$10x^4 - 12x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 8x + 7x + 5 - 12 = -2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 8$

2. Calcula $P(x) - Q(x)$ els polinomis del exemple anterior:

a)
$$\begin{array}{rrrrrr} & 10x^4 & -7x^3 & & -8x & +5 \\ - & -12x^4 & & +3x^2 & +7x & -12 \\ \hline & 22x^4 & -7x^3 & -3x^2 & -15x & +17 \end{array}$$

b) $(10x^4 - 7x^3 - 8x + 5) - (-12x^4 + 3x^2 + 7x - 12) =$
$10x^4 + 12x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 8x - 7x + 5 + 12 = 22x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 15x + 17$

2.3.2 Producte de polinomis:

Per multiplicar polinomis ho podem fer de dues maneres:

a) Escriu els polinomis, l'un sota a l'altre fent coincidir els monomis del mateix grau
Multiplicar el monomi de grau més petit del polinomi de sota per cadascun dels monomis de l'altre polinomi. El resultat es posa a sota, fent coincidir els monomis del mateix grau.
Repeteix el procés anterior amb la resta de monomis del polinomi de sota.
Finalment, suma els polinomis que has obtingut.

b) Multiplicar cada terme del primer polinomi per tots els termes del segon polinomi, i desprès sumar-ho tot.

EXEMPLE

Multiplica els polinomis $P(x) = 10x^4 – 7x^3 – 8x + 5$ i $Q(x) = 3x + 2$

a)

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 10x^4 & -7x^3 & & -8x & +5 \\
 & & & & 3x & +2 \\
\hline
 & 20x^4 & -14x^3 & & -16x & +10 \\
30x^5 & -21x^4 & & -24x^2 & +15x & \\
\hline
30x^5 & -x^4 & -14x^3 & -24x^2 & -x & +1
\end{array}
$$

b) $(3x + 2)\cdot(10x^4 – 7x^3 – 8x + 5) =$
$3x\cdot(10x^4 – 7x^3 – 8x + 5) + 2\cdot(10x^4 – 7x^3 – 8x + 5) =$
$30x^5 – 21x^4 - 24x^2 + 15x + 20x^4 - 14x^3 - 16x + 10 = 30x^5 – x^4 - 14x^3 - 24x^2 – x +10$

2.3.3 Divisió de polinomis. Regla de Ruffini:

Per dividir dos polinomis qualssevol procedim de la següent forma:

EXEMPLE

Divideix el polinomi $A(x) = 3x^5 + 6x^4 – 5x^3 – 2x^2 + 2x – 4$ pel polinomi $B(x) = x^3 – x + 2$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & +6x^4 & -5x^3 & -2x^2 & +2x & -4 & x^3 - x + 2 \\
\cline{7-7}
-3x^5 & & +3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2 + 6x - 2 \\
\cline{1-6}
 & +6x^4 & -2x^3 & -8x^2 & +2x & -4 & \\
 & -6x^4 & & +6x^2 & -12x & & \\
\cline{2-6}
 & & -2x^3 & -2x^2 & -10x & -4 & \\
 & & +2x^3 & & -2x & +4 & \\
\cline{2-6}
 & & & -2x^2 & -12x & &
\end{array}
$$

- Dividir dos polinomis, A(x) (dividend) dividit per B(x) (divisor), és trobar dos polinomis Q(x) (quocient) i R(x) (residu) tals que:

$$A(x) = Q(x)\cdot B(x) + R(x) \quad \text{on } 0 \le \text{grau de } R(x) < \text{grau de } B(x)$$

Divisió per x – a. Regla de Ruffini:

La regla de Ruffini ens permet trobar el quocient i el residu de la divisió de polinomis en què el divisor es un polinomi de la forma $x – a$ o $x + a$

EXEMPLE

Si volem dividir el polinomi $A(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 2x - 4$ per $B(x) = x - 2$. El procediment ha seguir és el següent:

Terme independent del divisor (canviat de signe)→ 2	1	-3	0	-2	2	-4	→ coeficients del dividend
	1 ← primer coeficient del dividend						

Es tracta de multiplicar el 2 per el primer coeficient del dividend i posar el resultat sota el següent coeficient del dividend i sumar (restar).

	1	-3	0	-2	2	-4
2		2	-2	-4	-12	-20
	1	-1	-2	-6	-10	-24

Coeficients del quocient ↑ Residu

Així dons: Quocient $Q(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 6x - 10$ i el residu $R(x) = -24$

2.3.4 Potència d'un polinomi

- Binomi de Newton

Es tracta de deduir una formula que ens permeti elevar a qualsevol potència d'exponent natural n, un binomi, es a dir com calcular $(a + b)^n$

Si desenvolupem les potències de (a+b)

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

observem que els coeficients surten de la seqüència

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Aquest és el triangle de Tartaglia. Cadascun d’aquests nombres correspon al valor d’un nombre combinatori

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ex:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Per escriure la potència d’un binomi utilitzem el Binomi de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{h=n}\binom{n}{h}a^{n-h}b^h$$

- La potència d’un polinomi, $[P(x)]^n$, és una formula abreujada d’escriure el producte d’un polinomi n vegades:

$$[P(x)]^n = \underbrace{P(x)\cdot P(x)\cdot P(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P(x)}_{\text{n vegades}}$$

<u>EXEMPLE</u>

Trobeu el polinomi que resulta de desenvolupar l’expressió $(2x^2 + 3)^5$

$$\begin{aligned}(2x^2+3)^5 = {} & \binom{5}{0}(2x)^5\cdot 3^0 + \binom{5}{1}(2x)^4\cdot 3^2 + \binom{5}{2}(2x)^3\cdot 3^2 + \binom{5}{3}(2x)^2\cdot 3^3 \\ & + \binom{5}{4}(2x)^1\cdot 3^4 + \binom{5}{5}(2x)^0\cdot 3^5 \\ & = 32x^5 + 5\cdot 16x^4\cdot 3 + 10\cdot 8x^3\cdot 9 + 10\cdot 4x^2\cdot 27 + 5\cdot 2x\cdot 81 \\ & + 243\end{aligned}$$

2.4 <u>TEOREMA DEL RESIDU:</u>

<u>EXERCICI</u>

Donat el polinomi $A(x) = x^3 - 2x + 3$

1. Aplicant la regla de Ruffini calcula el residu de les següents divisions:
   a) $A(x) : (x - 2)$
   b) $A(x) : (x + 3)$

2. Calcula el valor numèric del polinomi $A(x)$ per a:
   a) $x = 2$
   b) $x = -3$

3. Que podem deduir dels dos apartats anteriors?

<u>Solució :</u>

1. a)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}$$

↑
Residu

b)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & & -3 & 9 & -21 \\ \hline & 1 & -3 & 7 & -18 \end{array}$$

↑
Residu

2 a) $A(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 8 - 4 + 3 = 7$
b) $A(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 3 = -27 + 6 + 3 = -18$

3. El residu coincideix amb el valor numèric

2.4.1 <u>Teorema del residu:</u>

El residu de la divisió del polinomi $P(x)$ per a $(x - a)$ és el valor numèric del polinomi $P(x)$ per a $x = a$.

2.4.2 <u>Arrels d'un polinomi:</u>

- Quan el valor numèric d'un polinomi $P(x)$ per $x = a$ és igual a zero ($P(a) = 0$), diem que a és una **arrel** (o un **zero**) del polinomi $P(x)$.

- el que és el mateix se la divisió de $P(x)$ per $(x - a)$ es exacta (el residu és 0) diem que $x = a$ és arrel del polinomi $P(x)$.

2.4.3 **Càlcul d’arrels d’un polinomi:**

Calcular les arrels d’un polinomi, és trobar els valors de la variable que fan que el valor numèric sigui zero, es tracta per tant de resoldre l’equació P(x) = 0:

- Si el polinomi és de grau menor que 3, resolem l’equació plantejada.

EXEMPLE

Troba les arrels del polinomi $P(x) = x^2 - 2x - 8$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Les arrels del polinomi són 4 i -2

- Si el polinomi és de grau igual o major que tres utilitzem la regla de Ruffini:

EXEMPLE

Troba les arrels del polinomi $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$

Provem un valor que sigui divisor del terme independent en aquest cas $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

Repetim el procés amb el mateix valor i si no ho compleix provem amb un altre divisor del nou terme independent

Les arrels d’aquest Polinomi són -1, 2 i -2

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -3 & -8 & -4 \\
-1 & & -1 & -1 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & -4 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & & \\
-2 & & -2 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

OBSERVACIONS:

En el cas de polinomis sense terme independent, caldrà primer treure factor comú, i posteriorment aplicar la regla de Ruffini:

Exemple:

$P(x) = x^4 - x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1)$

- $x = 0$
- $x^3 - 1 = 0 \rightarrow$ Regla de Ruffini $\rightarrow x = 1$ o resolució d'equació

Les arrels de P(x) són 0 i 1

2.5 FACTORITZACIÓ D'UN POLINOMI:

- Factoritzar un polinomi consisteix en escriure'l com a producte de polinomis del grau més petit possible .
- Per factoritzar un polinomi fem servir diferents tècniques:

➢ Treure factor comú
➢ Igualtats notable
➢ Càlcul d'arrels del polinomi mitjançant la regla de Ruffini

EXEMPLE

a) Factoritzeu el polinomi $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$

Utilitzant les arrels trobades en l'apartat anterior: $P(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot 1$

b) Factoritzeu el polinomi $Q(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2$

En primer lloc podem treure factor comú $x^2 \rightarrow Q(x) = x^2(x^3 - 2x^2 + x - 2)$

Ara trobem les arrels del polinomi $x^3 - 2x^2 + x - 2$ aplicant la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ & x^2 & x & \text{terme independent} & \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$

Per tant

$$Q(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)(x^2 + 1)$$

2.6 FRACCIONS ALGEBRAIQUES:

2.6.1 Definició

Una fracció algebraica és el quocient de dos polinomis,on el grau del denominador és sempre diferent de zero

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{grau de } Q(x) \neq 0$$

2.6.2 Operacions amb fraccions algebraiques:

- Simplificació de fraccions algebraiques: Per simplificar fraccions algebraiques cal recordar que només podem eliminar del numerador i denominador expressions iguals que estiguin multiplicant.

EXEMPLE

Simplifiqueu la fracció algebraica: $\frac{(b^5-b^4)(a^2+2a+1)}{(a+1)ab^7}$

$$\frac{(b^5-b^4)(a^2+2a+1)}{(a+1)ab^7} = \frac{b^4(b-1)(a+1)^2}{(a+1)ab^7} == \frac{(b-1)(a+1)}{ab^3}$$

- Suma i resta de fraccions algebraiques : Per sumar o restar fraccions algebraiques, en primer lloc hem de reduir-les a comú denominador i desprès haurem de sumar o restar els numerador i dividir per el denominador comú

EXEMPLE

Calculeu la següent operació amb fraccions algebraiques $\frac{x^2}{y} + \frac{y^3}{x^2} - \frac{5}{y^2}$

m.c.m $(y,x^2,y^2) = x^2 \cdot y^2$

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^3}{x^2} - \frac{5}{y^2} = \frac{yx^4}{x^2 \cdot y^2} + \frac{y^5}{x^2 \cdot y^2} - \frac{5x^2}{x^2 \cdot y^2} = \frac{yx^4 + y^5 - 5x^2}{x^2 \cdot y^2}$$

- Producte i divisió de fraccions algebraiques:

➢ Per multiplicar dues fraccions algebraiques només cal multiplicar els numeradors per una banda i els denominadors per una altra
➢ Per dividir dues fraccions algebraiques hem de multiplicar la primera per la inversa de la segona. (o en creu com quan es divideixen fraccions)

EXEMPLE

Calculeu:

a) $\frac{10x^5}{y^5} \cdot \frac{y^3}{5x^2} = \frac{10x^5 \cdot y^3}{y^5 \cdot 5x^2} = \frac{2x^3}{y^2}$;

b) $\frac{3x^5}{y^5} : \frac{6y^3}{x} = \frac{3x^5 \cdot x}{y^5 \cdot 6y^3} = \frac{x^4}{2y^8}$