TEMA 3: Equacions i inequacions

3.1 IGUALTATS ALGEBRAIQUES

Una igualtat algebraica està formada per dues expressions algebraiques separades per un signe igual. Les lletres que apareixen en les igualtats algebraiques reben el nom de variables o incògnites.

Podem diferenciar dos tipus d'igualtats algebraiques:

- Identitats: són igualtats que sempre es compleixen, per qualsevol valor que donem a les incògnites o variables . Les més importants són els productes notables

Quadrat d'una suma	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Quadrat d'una resta	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma per diferència	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

- Equacions: són igualtats que només es compleixen per determinats valors numèrics de les variables.

  Les equacions es poden classificar segons:

  - El nombre de variables o incògnites

    Ex: $3x - 2y = 8$ Equació amb dues incògnites
    $3 - x^2 = 2 + x$ Equació amb una incògnita

  - El major exponent que presenta la variable

    Ex: $2 + y^4 + 5y = y^2$ Equació de grau quatre
    $5x - 2 = 3x$ Equació de primer grau

3.2 EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA

La resolució consisteix en trobar el valor numèric de la variable pel qual es compleix la igualtat. Hem de:

i) eliminar els parèntesi
ii) eliminar els denominadors
iii) passem tots els termes que tenen incògnita (sola o acompanyada per un coeficient) a un costat de la igualtat i la resta a l'altre. Hem de tenir en compte que en canviar de costat el nombres que estan

sumant	passen	restant
restant	"	sumant
multiplicant	"	dividint , ...

iv) agrupem termes i aïllem la variable

EXEMPLE:

$$2x - \frac{3}{8} = 5 + \frac{x}{12}$$

$48x - 9 = 120 + 2x$
$48x - 2x = 120 + 9$
$46x = 129$
$x = \frac{129}{46}$

3.3 EQUACIONS DE SEGON GRAU AMB UNA INCÒGNITA

3.3.1 Resolució d' equació de segon grau amb una incògnita

Per resoldre una equació de segon grau amb una incògnita

- traiem parèntesi
- traiem denominadors
- agrupem termes
- passem tot a un costat de la igualtat fins obtenir una expressió

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad \text{on a, b, c són nombres}$$

Podem tenir:

- Equacions incompletes

  a) $a x^2 + b x = 0$

  b) $a x^2 + c = 0$

  EXEMPLES

a) $2x^2 = 3x \rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(2x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) $4x^2 + 8 = 0$

$4x^2 = -8$
$x^2 = -2$
$x = \sqrt{-2}$ No té solució

- Equacions completes $a x^2 + b x + c = 0$

  Apliquem la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.3.2 Nombre de solucions d'una equació de segon grau:

El nombre de solucions d'una equació de segon grau depèn del signe l'expressió $b^2 - 4ac$ anomenada discriminant i es representa pel signe Δ

- si $\Delta > 0$ hi ha dues solucions
- si $\Delta = 0$ hi ha una solució
- si $\Delta < 0$ no té solució

3.4 EQUACIONS BIQUADRADES

Són equacions del tipus $a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$

Per resoldre fem un canvi de variable $t = x^2$,

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0 \quad \xrightarrow{x^2 = t} \quad a\,t^2 + b\,t + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} t_1 & x = \pm\sqrt{t_1} \\ t_2 & x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

EXEMPLE

$$3\,x^4 = 10 - 13\,x^2$$
$$3\,x^4 + 13\,x^2 - 10 = 0 \quad \xrightarrow{x^2 = t} \quad 3\,t^2 + 13\,t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \frac{4}{6} & x = \pm\sqrt{\frac{4}{6}} \\ -5 & x = \sqrt{-5} \end{cases}$$

(No té solució)

3.4 EQUACIONS IRRACIONALS

Són equacions on la variable o incògnita es troba dins d'arrel
Ex:

$$\sqrt{x+1} = 3x$$

Podem tenir:

- una sola arrel:
  - separem l'arrel de la resta a costats diferents de la igualtat
  - agrupem termes
  - elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
  - resolem l'equació

EXEMPLE

$$\sqrt{2x-1} - 2x = 1$$

$$\sqrt{2x-1} = 1 + 2x$$

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (1 + 2x)^2$$

$$\downarrow \; (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

$$2x - 1 = 1 + 4x^2 + 4x$$

$$0 = 4x^2 + 2x + 2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} \qquad \textit{No té solució}$$

- Dues o més arrels
  - separem les arrels a costats diferents de la igualtat
  - elevem al quadrat tots dos costats de la igualtat
  - si queden encara arrels repetim el procediment fins aplicar l'apartat anterior
  - solucionem l'equació

EXEMPLE:

$$3 - \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 0$$

$$3 - \sqrt{x} = \sqrt{x-1}$$

$$(3 - \sqrt{x})^2 = (\sqrt{x-1})^2$$

$$\downarrow \; (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$9 + x - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x} = x - 1$$

$$10 = 6\sqrt{x}$$

$$10^2 = (6\sqrt{x})^2$$

$$100 = 36x \rightarrow x = \frac{25}{9}$$

NOTA

Per resoldre equacions de major grau amb solucions senceres haurem de fer servir el mètode de Rufinni

EXEMPLE

Resoleu l'equacio $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$
Aplicant Rufinni

	1	2	-3	-8	-4
-1		-1	-1	4	4
	1	1	-4	-4	0
-1		-1	0	4	
	1	0	-4	0	
2		2	4		
	1	2	0		
-2		-2			
	1	0			

L'equació té per tant tres solucions $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ i $x_3 = -2$

3.5 SISTEMES D'EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

3.5.1 Classificació dels sistemes segons el nombre de solucions

$$\text{Sistemes} \begin{cases} \text{compatibles (té solució)} \begin{cases} \text{determinats (una única solució)} \\ \text{indeterminats (infinites solucions)} \end{cases} \\ \text{incompatibles (no tenen solució)} \end{cases}$$

3.5.2 Resolució de sistemes d'equacions amb dues incògnites

Hi ha tres mètodes numèrics de resolució:

- Substitució. Consisteix en deixar sola una de les variables d'una de les equacions i substituir el resultat obtingut a l'altre equació

EXEMPLE

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ -x + 4y = -1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 4y + 1 = x \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 2(4y + 1) - 3y = 2 \\ 8y + 2 - 3y = 2 \\ 5y = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4y + 1 = x \\ 4 \cdot 0 + 1 = x \\ 1 = x \end{array}$$

Sistema compatible determinat

- Igualació. Consisteix en deixar sola la mateixa variable de totes dues equacions i igualar els resultats obtinguts.

EXEMPLE

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ 6y = 10 - 2x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 5 - 3y \\ x = \dfrac{10 - 6y}{2} = 5 - 3y \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} 5 - 3y = 5 - 3y \\ 3y - 3y = 5 - 5 \\ 0y = 0 \end{array} \qquad y = \text{qualsevol nombre}$$

x = un nombre igual a 5-3y

Sistema compatible indeterminat

- Reducció. Consisteix en multiplicar una o les dues equacions pel (pels) nombre (s) convenients, de manera que en sumar totes dues equacions una de les variables quedi anul·lada.

EXEMPLE

$$\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + y = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \times 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ -2x + 2y = -2 \\ \hline / \qquad y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ x = 3 \end{array}$$

Sistema compatible determinat

EXEMPLE

$$\left.\begin{array}{l}-3x + y = 2\\ -6x+2y = 1\end{array}\right\} \qquad x(-2) \quad \left.\begin{array}{l}6x - 2y = -4\\ -6x + 2y = 1\end{array}\right\}$$

$$/ \qquad / \quad = -3$$

$$0 = -3$$

Sistema incompatible

• La representació gràfica de les equacions com rectes ens permet solucionar el sistema

3.6 SISTEMES D'EQUACIONS NO LINEALS

És un sistema format per dues o més equacions on alguna d'elles no lineal, per exemple, una equació de grau major a 1, amb fraccions algebraiques o amb radicals.

EXEMPLE

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 17$$
$$2x + 2y = 46$$

$$\begin{cases}(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 17^2\\ x + y = 23\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2 + y^2 = 289\\ x + y = 23 \quad \rightarrow \quad y = 23 - x\end{cases}$$

$$x^2 + (23 - x)^2 = 289$$
$$x^2 + 23^2 - 2 \cdot 23 \cdot x + x^2 = 289$$
$$2x^2 - 46x + 240 = 0$$
$$x^2 - 23x + 120 = 0$$
$$x = \frac{-(-23) \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 120}}{2.1} = \begin{cases}8\\ 15\end{cases}$$

$$x = 8 \quad \rightarrow \quad y = 23 - 8 = 15$$
$$x = 15 \quad \rightarrow \quad y = 23 - 15 = 8$$

3.7 <u>INEQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA</u>

Una inequació és una desigualtat formada per dues expressions algebraiques separades per un dels signes >, <, ≥ o ≤

Es resol com l'equació de primer grau però amb una diferència: en el últim pas, quan deixem sola la incògnita, si el nombre que acompanya la variable és negatiu i està multiplicant o dividint, al passar a l'altre costat, es canvia el signe de la desigualtat.

<u>EXEMPLE</u>

$$2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$24+24x+24+6\cdot(x-3)\leq 8x-(5x-3)+36x$$

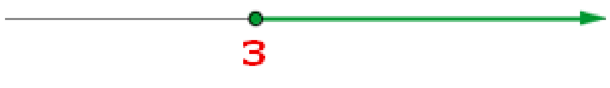
$$24+24x+24+6x-18\leq 8x-5x+3+36x$$

$$24x+6x-8x+5x-36x\leq 3-24-24+18$$

$$-9x\leq -27$$

$$9x\geq 27$$

$$x\geq 3$$



$[3, +\infty)$

3.8 <u>SISTEMES D' INEQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA</u>

Es resol cada equació per separat, la solució és la intersecció de solucions.

<u>EXEMPLE</u>

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 \geq -1 \end{cases}$$

$2x+3 \geq 1 \qquad 2x \geq 1-3 \qquad 2x \geq -2 \qquad x \geq -1$

$-x+2 \geq -1 \qquad -x \geq -1-2 \qquad -x \geq -3 \qquad x \leq 3$

[−1, 3]

3.9 <u>INEQUACIONS RACIONALS</u>

Es resolen d'una forma semblant a les de segon grau tenint en compte que el denominador no pot ser zero

- Trobem les arrels del numerador i del denominador
- Representem els valors en la recta real. Com el denominador no pot ser igual a zero les arrels del denominador no poden ser solució de la inequació.
- Agafem un punt de cada interval i comprovem si compleix la inequació

<u>EXEMPLE</u>

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0$$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

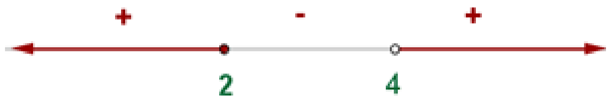
$x - 4 = 0 \qquad x = 4$

$\frac{x-2}{x-4} \geq 0 \qquad x \neq 4$

$x = 0 \qquad \frac{0-2}{0-4} > 0$

$x = 3 \qquad \frac{3-2}{3-4} < 0$

$x = 5 \qquad \frac{5-2}{5-4} > 0$



$S = (-\infty, 2] \cup (4, \infty)$

3.10 INEQUACONS DE SEGON GRAU AMB UNA INCÒRNITA

Per resoldre inequacions de segon grau amb un incògnita:

- Passem tot a un costat de la desigualtat fins obtenir una expressió

$$ax^2 + bx + c > 0$$

- Es resol l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$ i es troben les solucions o arrels x_1 i x_2.
- Representem aquests valors en la recta real, la qual queda dividida en tres intervals. Agafem un punt qualsevol de cada interval i comprovem si es compleix la desigualtat, si es compleix tot l' interval és solució de la inequació.

<u>EXEMPLE</u>

$x^2 - 6x + 8 > 0$

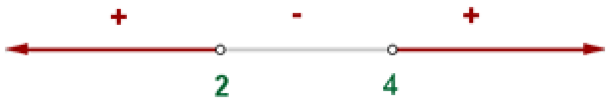
$x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$P(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 > 0$

$P(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17 - 18 < 0$

$P(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 33 - 30 > 0$



$S = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

<u>NOTA</u>

Si l'equació no te solució, agafem un valor qualsevol,
- si es compleix la inequació la solució són tots els nombres reals |R
- si no es compleix no hi ha solució

3.11 SISTEMES D' INEQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB DUES INCÒGNITA

La solució d'aquest sistema és l' intersecció de les regions que correspon a la solució de cadascuna de les inequacions

<u>EXEMPLE</u>

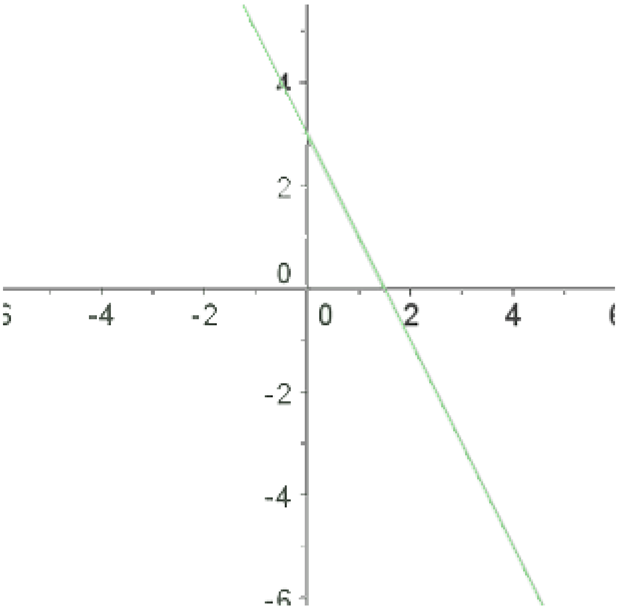
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

1. Representem gràficament la regió solució de la primera inequació

- Transformem la desigualtat en igualtat $2x + y = 3$
- Representem la recta que obtenim de la igualtat (nomes cal obtenir dos punts que compleixen l'equació)

$x = 0;\ 2 \cdot 0 + y = 3;\ y = 3;\ (0, 3)$

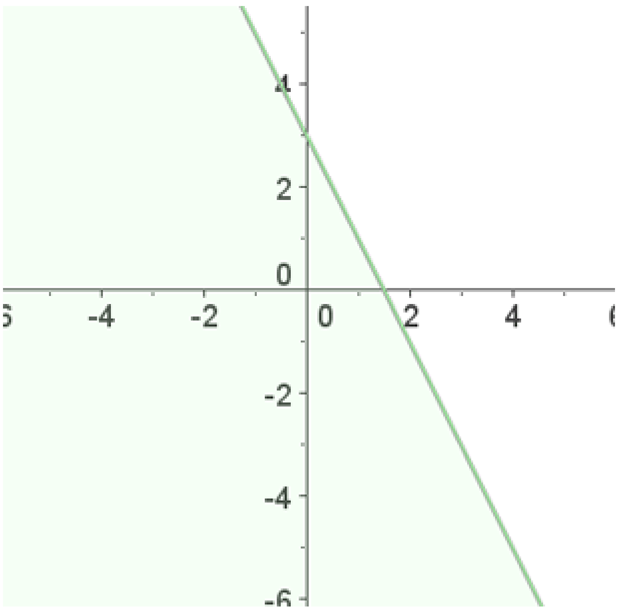
$x = 1;\ 2 \cdot 1 + y = 3;\ y = 1;\ (1, 1)$



- Prenem qualsevol punt que no pertany a la recta, per exemple (0,0) i el substituïm en la desigualtat. Si la compleix, la solució es el semiplà on es troba aquest punt, en cas contrari la solució serà l'altre semiplà

$2x + y \leq 3$

$2 \cdot 0 + 0 \leq 3$ $0 \leq 3$ **Sí**

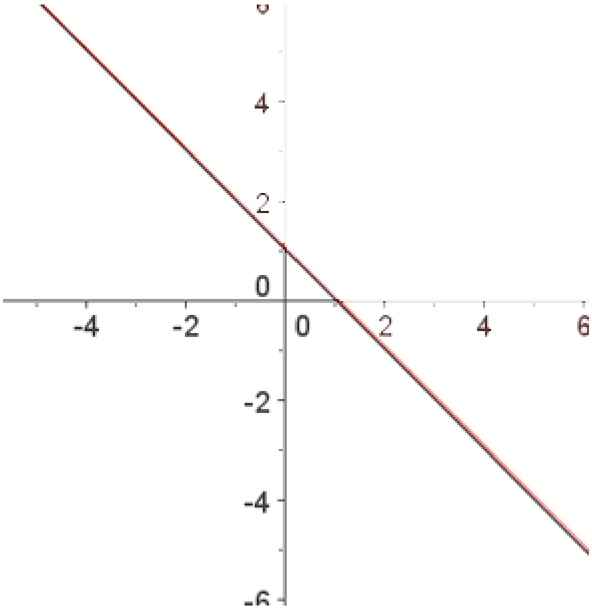


2. Representem gràficament la regió solució de la segona inequació

x + y = 1

x = 0; 0 + y = 1; y = 1; (0, 1)

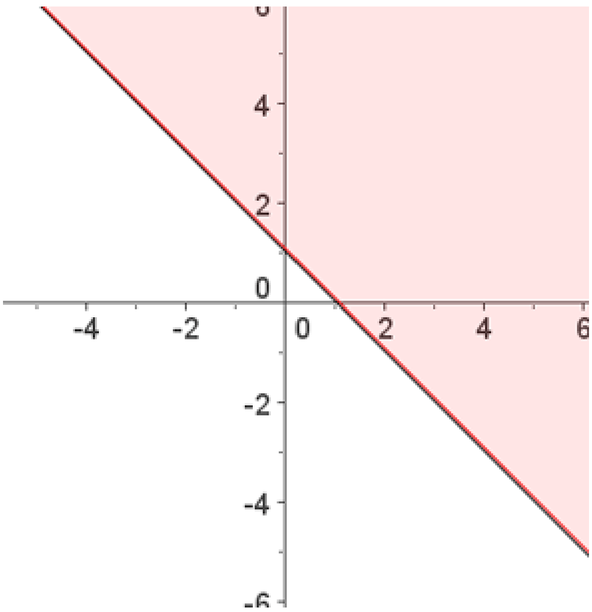
x = 1; 1 + y = 1; y = 0; (1, 0)



;

x + y ≥ 1

0 + 0 ≥ 1 **No**



3. La solució és l’ intersecció de les regions solucions