TEMA 4: Potències

Teoria

a) POTÈNCIES

4.1. DEFINICIÓ

- Potència d'un nombre es el resultat que ens dona la multiplicació successiva d'un número per si mateix.

- Una potència es una manera abreviada d'escriure un producte d'un nombre per si mateix.

EXEMPLES:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$
$3 \cdot 3 = 3^2$
$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3$
$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$$a^n = a \cdot a \cdot \underbrace{a \cdot \dots \dots \dots \cdot a \cdot a}_{\text{n vegades}}$$

- En l'expressió de la potència d'un nombre es consideren dos parts:
  - La base: és el nombre que se multiplica per si mateix
  - L'exponent: es el nombre que indica les vegades que hem de multiplicar la base

$$\text{base} \leftarrow a^{n \rightarrow \text{exponente}}$$

- Per nombrar o llegir una potència diem primer la base i després l'exponent :
  - Si l'exponent es un dos → elevat al quadrat
  - Si l'exponent es un tres → elevat al cub
  - En els demes casos es diu elevat a la quarta, a la quinta, a la sisena ....

4.2. SIGNE D'UNA POTÈNCIA

EXEMPLES:

Calculeu i indiqueu el signe de les següents potencies:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
c) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$
d) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

Quadre resum:

Base \ Exponent	Parell	Senar
Positiva	+	+
Negativa	+	-

4.3. OPERACIONS AMB LES POTÈNCIES

4.3.1. Producte de potències de la mateixa base:

EXEMPLES:

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 2^{5+3}$
b) $(-5)^3 \cdot (-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^7 = (-5)^{3+4}$

En general:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

4.3.2. Divisió de potències de la mateixa base:

EXEMPLES:

a) $\frac{2^6}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 2^{6-3}$

b) $\frac{5^7}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 2^{7-3}$

En general:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

b) ARRELS

4.4. DEFINICIÓ

- La radicació és l'operació inversa de la potenciació-
- Anomenem arrel *n-éssima* d'un nombre donat *a* al nombre *b* que elevat a n ens dona *a*

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a}$$

Índex

$\sqrt[n]{a}$ → radical

EXEMPLES:

a) $\sqrt[2]{9} = \pm 3$; ja que $3^2 = 9$; $(-3)^2 = 9$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$; ja que $2^3 = 8$;
c) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$; ja que $3^4 = 81$; $(-3)^4 = 81$
d) $\sqrt[5]{-32} = -2$; ja que $(-2)^5 = -32$
e) $\sqrt{-25} = \nexists$; ja que no hi ha cap nombre que elevat al quadrat doni com a resultat – 25

Indiqueu el nombre de solucions:

Índex / Radical	Parell	Senar
Positiva	Dues solucions ±	Una solució +
Negativa	No existeix solució	Una solució -

4.5. OPERACIONS AMB RADICALS DEL MATEIX ÍNDEX

4.4.1. Producte de radicals

EXEMPLES: $\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}}$

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2$

b) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot 3}=\sqrt[4]{81}=\pm 3$

4.4.2. <u>Quocient de radicals</u>

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

EXEMPLES:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=\pm\mathbf{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{32}{4}}=\sqrt[3]{8}=2$

4.4.3. <u>Potència de radicals</u>

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}}$$

EXEMPLES:

a) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$

b) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4]{25}$ No és exacta

4.4.4. <u>Radical d'un radical</u>

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}}$$

EXEMPLES:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = \pm 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}} = \sqrt[3\cdot 4]{125} = \sqrt[12]{125}$ No és exacta

4.4.5. <u>Expressio d'un radical en forma de potencia</u>

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

EXEMPLES:

a) $\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$

b) $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$

4.5. <u>EXTRACCIÓ DE FACTORS D'UN RADICAL</u>

Per extraure factors d'un radical :

Es descompon el radicant en factors. Si

- Un exponent és menor que l'índex, el factor corresponent se deixa en el radicant
- Un exponent és igual a l'índex, el factor corresponent surt fora del radicant
- Un exponent és major que l'índex, es divideix l'exponent per l'índex: el quocient que s'obté és l'exponent del factor que surt de l'arrel i el residu és l'exponent del factor de dintre del radicant.

EXEMPLES:

a) $\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5^5} = 3\cdot 5^2\cdot\sqrt{2\cdot 5}$

b) $\sqrt[4]{2^7\cdot 3^{14}\cdot 5^4} = 2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot\sqrt[4]{2^3\cdot 3^2}$

4.6. INTRODUCCIÓ DE FACTORS EN UN RADICAL

S'introdueixen els factors elevats a l'índex corresponent del radical

EXEMPLES:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{12}$

b) $3^3\cdot 5^2\cdot\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{(3^3)^4\cdot(5^2)^4\cdot 7} = \sqrt[4]{3^{12}\cdot 5^8\cdot 7}$

4.7. SUMA (RESTA) DE RADICALS

Només es poden sumar (restar) dos radicals quan són radicals semblants, es a dir, si són radicals amb el mateix índex i igual radicant.

EXEMPLES:

a) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2-4+1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

b) $3\sqrt[5]{5} - 2\sqrt[5]{5} - \sqrt[5]{5} = (3-2-1)\sqrt[5]{5} = 0\sqrt[5]{5} = 0$

c)
$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2\cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2\cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} =$
$9\sqrt{3}$