

TEMA 5: Successions. Progressions. Aritmètica Mercantil

5.1 SUCCESSIONS

5.1.1 Definició

- Una **successió** es un conjunt de nombres ordenats, es a dir, on és important la posició que ocupen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Cadascun dels valors de la successió s'anomena **terme**, el subíndex indica el lloc que ocupa en la successió, així a_1 serà el primer terme de la successió, a_5 representarà el terme que ocupa el lloc cinc ..., i en general a_n s'anomena **terme enèsim o terme general de la successió**.

EXEMPLE

Donada la successió $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$:

- Quin valor té el tercer terme?
 - Quin valor té el terme a_{12} ?
 - Quina seria l'expressió del terme enèsim o general?
- A partir del terme general una successió es pot definir de dues maneres:
 - A partir d'una llei de recurrència que permeti calcular cada terme a partir del anterior o dels anteriors
 - Amb una fórmula o llei general que permeti calcular un terme a partir del lloc que ocupa

EXEMPLES

1. Escriviu els 4 primers termes de la successió a amb terme general $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4$ i $a_1 = 3$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot a_1 + 4 = 3 \cdot 3 + 4 = 13$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 + 4 = 3 \cdot 13 + 4 = 43$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 + 4 = 3 \cdot 43 + 4 = 133$$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{3, 13, 43, 133, \dots\}$$

2. Escriu els 4 primers termes de la successió a amb terme general $a_n = \frac{n}{2n+1}$

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{3}{7}$$

$$a_2 = \frac{2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{5}$$

$$a_4 = \frac{4}{2 \cdot 4 + 1} = \frac{4}{9}$$

$$a_n = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots \right\}$$

5.2 PROGRESSIONS

Hi ha dos tipus de successions amb les què es molt fàcil de treballar:

- **progressions aritmètiques:** aquelles en què cada terme s'obté de l'anterior sumant-hi (restant-hi) un mateix valor
- **progressions geomètriques,** en què cada terme, és igual a l'anterior multiplicat (dividit) per un mateix valor

EXEMPLES

1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$ és una progressió aritmètica?

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4 = 2 + 2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = 6 = 4 + 2 = a_2 + 2$$

$$a_4 = 8 = 6 + 2 = a_3 + 2$$

Si, ja que cada terme s'obté sumant 2 al terme anterior

2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{ \sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, \dots \}$ és una progressió geomètrica?

$$a_1 = \sqrt{5}$$

$$a_2 = 5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = a_1 \cdot \sqrt{5}$$

$$a_3 = 5 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5} = a_2 \cdot \sqrt{5}$$

$$a_4 = 25 = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = a_3 \cdot \sqrt{5}$$

Si, ja que cada terme s'obté multiplicant per $\sqrt{5}$ el terme anterior

5.2.1 Progressions aritmètiques

Com ja hem dit, són aquelles successions $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en que cada terme resulta de la suma de l'anterior i un valor fix, anomenada **diferència** i representada per la lletra **d** ($a_n = a_{n-1} + d$)

- Expressió del terme general:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$

$$a_{15} = a_{14} + d = a_1 + 13d + d = a_1 + 14d$$

En general

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

EXEMPLE

Calculeu el terme general d'una progressió aritmètica amb $a_8 = 2$ i $d = -\frac{1}{2}$

$$a_8 = a_1 + 7d$$

$$2 = a_1 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow 2 + \frac{7}{2} = a_1 \rightarrow \frac{11}{2} = a_1 \rightarrow$$

$$a_n = \frac{11}{2} + (n - 1) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{12 - n}{2}$$

- La suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica és

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Demostració:

En una progressió aritmètica de n termes, la suma dels termes equidistants dels extrems és igual a la suma d'aquests extrems, ja que

$$a_{n-1} + a_2 = a_n - d + a_1 + d = a_n + a_1$$

$$a_{n-2} + a_3 = a_n - 2d + a_1 + 2d = a_n + a_1$$

De manera que

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ + S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \\ 2S_n &= (a_1 + a_n) \cdot n \end{aligned}$$

Per tant

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EXEMPLE

La suma dels n primers múltiples de 3 és 108. Quants múltiples de 3 hem sumat?

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \text{amb } a_n = 3n \\ 108 &= \frac{(3 + 3n) \cdot n}{2} \\ 108 \cdot 2 &= 3n + 3n^2 \\ 0 &= 3n^2 + 3n - 216 \quad \rightarrow n = -9 \quad \textit{impossible} \\ &\quad \rightarrow n = 8 \end{aligned}$$

S'han sumat els 8 primers termes

5.2.2 Progressions geomètriques

Recordeu que una progressió geomètrica és una successió en què cada terme (llevat del primer) s'obté multiplicant l'anterior per un valor fix anomenat **raó** de la progressió i representat per la lletra **r** ($a_n = a_{n-1} \cdot r$)

- Expressió del terme general:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$\text{-----}$$
$$a_{15} = a_{14} \cdot r = a_1 \cdot r^{13} \cdot r = a_1 \cdot r^{14}$$
$$\text{-----}$$

En general

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

EXEMPLE

Calculeu el terme general de la progressió geomètrica $a = \{ 3, -6, 12, -24, \dots \}$

$$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

- La suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Demostració:

En una progressió geomètrica de n termes observem que

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r$$

$$a_4 = a_3 \cdot r$$

De manera que

$$\begin{array}{r} r \cdot S_n = \quad \quad \quad + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r \\ - \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{array}$$

$$(r-1) S_n = -a_1 + 0 + 0 + \dots + 0 + a_n \cdot r$$

$$(r-1) S_n = -a_1 + a_n \cdot r$$

$$(r-1) S_n = -a_1 + (a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r$$

$$(r-1) S_n = -a_1 + a_1 \cdot r^n$$

$$(r-1) S_n = a_1 (-1 + r^n)$$

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

EXEMPLE

En una progressió geomètrica en què $r = \frac{1}{2}$ i $a_n = \frac{1}{3}$, calculeu S_{20} .

$$S_{20} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 0,667$$

• El producte dels n primers termes d'una progressió geomètrica

$$P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

EXEMPLE

Calculeu el producte dels cinc primers termes de la progressió geomètrica 3, 6, 12, ...

$$P_5 = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5}$$

$$a_5 = a_1 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48$$

$$P_5 = \pm \sqrt{(3 \cdot 48)^5} = 248.832$$

5.2.3 Interpolació

- Si entre dos nombres A i B es col·loquen una determinada quantitat de nombre, $d_1, d_2, d_3, \dots, d_h$, de manera que tots junts formen una progressió d'extremes A i B direm que hem **interpolat h mitjans** entra A i B
- Si formen una progressió aritmètica, direm que hem fet una interpolació de **h mitjans diferencials**. Per calcular la diferència cal considerar que la progressió aritmètica $\{A, d_1, d_2, d_3, \dots, d_h, B\}$ té $h + 2$ termes per tant $B = A + [(h+2) - 1]d = A + (h + 1)d$, si aïllem d

$$d = \frac{B - A}{h + 1}$$

EXEMPLE

Interpoleu tres mitjans diferencials entre 8 i -12.

$$d = \frac{-12 - 8}{3 + 1} = -5$$

La progressió serà 8, 3, -2, -7, -12.

- Si formen una progressió geomètrica, direm que hem fet una interpolació de **h mitjans proporcionals**. Per calcular la rao cal considerar que la progressió geomètrica $\{A, d_1, d_2, d_3 \dots d_h, B\}$ té $h + 2$ termes per tant $B = A \cdot r^{h+1}$, si aïllem r

$$r = \sqrt[h+1]{\frac{B}{A}}$$

EXEMPLE

Interpoleu tres mitjans proporcionals entre 3 i 48.

$$r = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{La progressió geomètrica serà: } 3, 6, 12, 24 \text{ i } 48.$$

5.3 ARITMÈTICA MERCANTIL

5.3.1 Percentatges

- Per calcular el **n %** de a s'aplica

$$n \% \text{ de } a = \frac{n \cdot a}{100}$$

EXEMPLE

Calculeu 3 % de 15

$$\frac{3 \cdot 15}{100} = 0,45$$

- El **tant per u** s'obté en expressar un percentatge com un nombre decimal.

$$n \% \text{ en tant per u} \rightarrow \frac{n}{100}$$

EXEMPLE

Expresseu 12 % en tant per u

$$12\% \rightarrow \frac{12}{100} = 0,12 \text{ tant per u}$$

- Si multipliquem el tant per u per mil obtenim el **tant per mil** ‰.

EXEMPLE

Expresseu 12% en tant per mil

$$12\% \rightarrow \frac{12}{100} = 0,12 \text{ tant per u} \rightarrow 0,12 \cdot 1000 = 120 \text{ ‰}$$

5.3.2 Percentatges encadenats

- Un **augment percentual** consisteix en augmentar a una quantitat C un $a\%$, de forma que si la quantitat és 100 pagarem $100 + a$, es a dir, per una quantitat C una augment del $a\%$ serà

$$(100 + a)\% \text{ de } C$$

Això es dona en cas d'impostos, recàrrecs, etc.

- Una **disminució percentual** consisteix en disminuir a una quantitat C un $a\%$, de forma que si la quantitat és 100 pagarem $100 - a$, es a dir, per una quantitat C una disminució del $a\%$ serà

$$(100 - a)\% \text{ de } C$$

Això es dona en rebaixes, bonificacions, etc.

- Quan sobre una mateixa quantitat s'efectuen diversos augments i / o disminucions parlem de **percentatges encadenats**.

EXEMPLE

Comprem un ordinador que, sense IVA, costa 1.075 €, i un ratolí que costa 35 € sobre el que em fan un descompte del 25%. Si l'IVA és d'un 16%, quant pagarem a la botiga d'informàtica?

Preu de l'ordinador : 1075 € + 16% d'aquesta quantitat corresponent a l' IVA

$$116\% \text{ de } 1075 \rightarrow \frac{116 \cdot 1075}{100} = 1247\text{€}$$

Preu del ratolí: 35 € - 25% d'aquesta quantitat en concepte de rebaixa

$$75\% \text{ de } 35 \rightarrow \frac{75 \cdot 35}{100} = 26,25\text{€}$$

Per tant pagarem $1247 + 26,25 = 1273,25$ euros

5.3.3 Interès simple

- L'interès simple, I , és el benefici que origina una quantitat de diners C_0 (capital) en un temps t (en anys) a un rèdit anual del $r \%$

$$I = \frac{C_0 \cdot r \cdot t}{100}$$

- En l'interès simple els beneficis es retiren després de cada període de temps i no es reinverteixen.
- El rèdit és un percentatge, mentre que l'interès és un nombre, si be, en llenguatge col·loquial parlem del 3% d'interès. Es a dir,

$$i = \frac{r}{100}$$

EXEMPLE

1. Per invertir diners en un dipòsit, un banc ens ofereix abonar-nos els interessos anualment en un compte diferent al dels diners invertits. Si invertim 8500 € a un 5% anual, quants diners rebrem en concepte d'interessos en 3 anys?

$$C_0 = 8500 \text{ €}$$

$$r = 5\%$$

$$t = 3$$

$$I = \frac{8500 \cdot 5 \cdot 3}{100} = 1275 \text{ €}$$

2. Quin rèdit ens ofereix el mateix banc si per una inversió de 15000 € durant 15 mesos rebem uns interessos de 630 €?

$$C_0 = 15000 \text{ €}$$

$$t = 15 \text{ mesos} = 1,25 \text{ anys}$$

$$I = 630$$

$$630 = \frac{15000 \cdot r \cdot 1,25}{100}$$

$$\frac{630 \cdot 100}{15000 \cdot 1,25} = r$$

$$r = 3,36\%$$

5.3.3 Interès compost

- Quan els interessos obtinguts al final de cada període s'afegeixen al capital inicial i es reinverteixen es parla d' **interès compost**.
-
- Si invertim un capital C_0 a un rèdit de $r\%$ durant t anys, el capital final C_f obtingut a interès compost serà

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

Demostració:

$$C_{1r \text{ any}} = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)$$

$$C_{2n \text{ any}} = C_{1r \text{ any}} + \frac{r}{100} C_{1r \text{ any}} = C_{1r \text{ any}} \left(1 + \frac{r}{100} \right) = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right) \left(1 + \frac{r}{100} \right) = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^2$$

$$C_{3r \text{ any}} = C_{2n \text{ any}} + \frac{r}{100} C_{2n \text{ any}} = C_{2n \text{ any}} \left(1 + \frac{r}{100} \right) = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^2 \left(1 + \frac{r}{100} \right) = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3$$

en t anys

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

EXEMPLES

1. En una entitat financera els interessos anuals s'afegeixen al capital invertit. Si el dipòsit inicial és de 12000 € a un rèdit del 4,5% anual, quants diners rebrem després de 5 anys?

$$C_0 = 12000 \text{ €}$$

$$t = 5 \text{ anys}$$

$$r = 4,5\%$$

$$C_f = 12000 \left(1 + \frac{4,5}{100} \right)^5 = 14954,18\text{€}$$

2. Quin interès ens ofereix un dipòsit de 12000 € si, després de 6 anys, ens tornen 15000 €?

$$C_0 = 12000 \text{ €}$$

$$t = 6 \text{ anys}$$

$$C_f = 15000 \text{ €}$$

$$15000 = 12000 \cdot (1+i)^6$$

$$\frac{15000}{12000} = (1+i)^6$$

$$\sqrt[6]{\frac{15000}{12000}} = 1+i$$

$$i = \sqrt[6]{\frac{5}{4}} - 1$$

$$i = 0,0379$$

3. Quant de temps cal tenir dipositats 200 € al 6% per obtenir 267,65 € al final del període?

$$C_0 = 200 \text{ €}$$

$$C_f = 267,65 \text{ €}$$

$$r = 6\%$$

$$267,65 = 200 \left(1 + \frac{6}{100} \right)^t$$

$$\frac{267,65}{200} = 1,06^t$$

$$1,33825 = 1,06^t$$

$$\ln 1,33825 = \ln (1,06^t)$$

$$\ln 1,33825 = t \cdot \ln 1,06$$

$$t = \frac{\ln 1,33825}{\ln 1,06}$$

$$t = 5,00031$$

El temps serà de 5 anys aproximadament

- Observem que el càlcul del capital final en l'interès compost és una progressió geomètrica amb primer terme $a_1 = C_0$ i raó r

$$r = \left(1 + \frac{r}{100} \right) = (1+i)$$

5.3.4 Anualitat de capitalització

- S'anomena **anualitat de capitalització** una quantitat de diners fixa que es disposa periòdicament per obtenir un capital al cap d'un temps determinat.
- Al principi de cada any s'inverteix un capital fixa C_0 durant t anys amb un rèdit r .
Veiem quin serà el rendiment final després de t anys de la primera imposició per cada imposició anual

Quota fixa ingressada	Anys que produeix interessos	Rendiment final
1ra imposició anual: C_0	t anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$
2na imposició anual: C_0	$t - 1$ anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t-1}$
3a imposició anual: C_0	$t - 2$ anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t-2}$
-----	-----	-----
Penúltima imposició: C_0	2 anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$
Última imposició: C_0	1 any	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)$

Observem que el capital final C_f serà la suma de tots els rendiments finals anteriors. Aquests rendiments són els t primers termes d'una progressió geomètrica amb:

$$a_1 = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

$$r = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Recordem que, en una progressió geomètrica, la suma dels n primers termes és:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - 1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 1}$$

Si treballem amb interessos:

$$C_f = C_0(1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad \text{en què } i = \frac{r}{100}$$

EXEMPLE

Quins seran els beneficis que s'obtidran si s'imposa un capital de 5000€ durant 3 anys al 5%?

$$C_0 = 5000 \text{ €}$$

$$t = 3 \text{ anys}$$

$$i = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$\begin{aligned} C_f &= C_0(1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \\ C_f &= 5000(1+0,05) \cdot \frac{(1+0,05)^3 - 1}{0,05} = \\ &= 5000(1,05) \cdot \frac{1,05^3 - 1}{0,05} = 16550,625 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\text{Beneficis: } 16550,625 - 3 \cdot 5000 = 1550,625 \text{ €}$$

5.3.5 Anualitat d'amortització

- S'anomena **anualitats d'amortització** una quantitat fixa de diners que es torna periòdicament per saldar un préstec al cap d'un temps determinat
- Les entitats financeres, per deixar-nos una quantitat de diners C en préstec, determinen unes imposicions anuals C_0 que s'han de pagar per tornar aquests diners. Aquestes imposicions tenen en compte el rendiment que aquests diners hauria donat al banc a un rèdit r durant t anys.
- Si ens deixen un capital de C euros, el deute més els interessos acumulats es converteixen en

$$C \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

Les quantitats C que imposem periòdicament també produeixen uns interessos, totes excepte la última, ja que quan fem l'ingrés d'aquesta es dona per tancat el procés

Quota fixa ingressada	Anys que produeix interessos	Rendiment final
1ra imposició anual: C_0	$t - 1$ anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t-1}$
2na imposició anual: C_0	$t - 2$ anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t-2}$
3a imposició anual: C_0	$t - 3$ anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t-3}$
-----	-----	-----
Penúltima imposició: C_0	1 anys	$C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^1$
Última imposició: C_0	1 any	C_0

La suma de totes aquestes quantitats que es troben en progressió geomètrica amb

$$a_1 = C_0$$

$$r = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

han de ser iguals al capital prestat més interessos, es a dir

$$C \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = C_0 + C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right) + \dots + C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t-2} + C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t-1}$$

$$C_f = C_0 \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - 1}{\frac{r}{100} \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$$

Si treballem amb interessos:

$$C = C_0 \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t} \quad \text{en què } i = \frac{r}{100}$$

EXEMPLE

Demaneu un préstec de 120.000 € a un interès anual del 4,5% i l'hem de tornar en 20 quotes anuals. De quant serà cada quota?

$$C = 120.000 \text{ €}$$

$$i = 0,045$$

$$t = 20 \text{ anys}$$

$$C = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

$$120.000 = C_0 \cdot \frac{(1+0,045)^{20} - 1}{0,045 \cdot (1+0,045)^{20}}$$

$$120.000 \cdot \frac{0,045 \cdot (1,045)^{20}}{1,045^{20} - 1} = C_0$$

$$C_0 = 9225,14 \text{ € / any}$$

Taules d'amortització

La taula d'amortització d'un préstec conté tota la informació sobre el préstec:

- Dates de pagament de cada quota
- Part de la quota dedicada a amortitzar interessos
- Part de la quota dedicada a amortitzar capital
- Quota a pagar anualment
- Capital pendent després de cada pagament

EXEMPLE

Elaboreu una taula d'amortització d'un préstec de 10.000 € al 5,5% durant 12 anys.

Calculeu la quota anual que hem de pagar:

$$C = 10.000 \text{ €}$$

$$i = 0,055$$

$$t = 12 \text{ anys}$$

$$10.000 = C_0 \cdot \frac{(1+0,055)^{12} - 1}{0,055 \cdot (1+0,055)^{12}}$$

$$10.000 \cdot \frac{0,055 \cdot (1,055)^{12}}{1,055^{12} - 1} = C_0$$

$$C_0 = 1160,29 \text{ €}$$

Anys	Interessos	Capital amortitzat:	Capital pendent
t = 0			10.000,00
t = 1	Amb la quota que paguem, 1160,29€, el primer que paguem són els interessos $10.000 \cdot 0,055 = 550$	el que sobra es destina a reduir el capital que ens han prestat Capital que amortitzo el primer any: $1160,29 - 550 = 610,29$	 $10.000 - 610,29 = 9.389,71$
t = 2	$9,389,71 \cdot 0,055 = 516,43$	$1160,29 - 516,43 = 643,86$	$9,389,71 - 643,86 = 8.745,85$
...

Taula d'amortització

Temps (any)	Quota anual (€)	Interessos del període (€)	Capital amortitzat (€)	Capital pendent (€)
0	-	-	-	10.000,00
1	1160,29	550 ⁽¹⁾	610,29 ⁽²⁾	9.389,71 ⁽³⁾
2	1160,29	516,43 ⁽⁴⁾	643,86	8.745,85
3	1160,29	481,02	679,27	8.066,58
4	1160,29	443,67	716,62	7.349,96
5	1160,29	404,25	756,04	6.593,92
6	1160,29	362,67	797,62	5.796,30
7	1160,29	318,80	841,49	4.954,81
8	1160,29	272,51	887,78	4.067,03
9	1160,29	223,69	936,60	3.130,43
10	1160,29	172,17	988,12	2.142,31
11	1160,29	117,83	1042,46	1.099,85
12	1160,29	60,49	1099,80	0,05

Nota: Quan al final ens queda un capital pendent com en aquest cas, s'ajusta l'última anualitat per tal que doni exacte.

Amortitzacions inverses

Mentre que el préstec que ens dona un banc per la compra d'un habitatge s'anomena hipoteca, la hipoteca inversa consisteix en què una persona, en un determinat moment, ingressa una quantitat de diners o un habitatge i, a canvi, el banc li dona una quantitat fixa anual per la resta de la seva vida.

Per calcular la quota que rebrà hem de consultar les taules d'esperança de vida donades per l'Institut Nacional d'Estadística (INE) que ens marca el termini d'amortització.

EXEMPLE

En fer 70 anys, un home diposita 50.000 € en una entitat financera per tal de rebre una quantitat anual de per vida. Si l'operació es fa a un rèdit del 3,5% anual, quina serà la renda anual que rebrà aquesta persona?

Segons l'INE (2005) l'esperança de vida d'un home de 70 anys és de 13,61 anys

$C = 50.000 \text{ €}$
 $i = 0,035$
 $t = 13,61 \text{ anys}$

$$50.000 = C_0 \cdot \frac{(1 + 0,035)^{13,61} - 1}{0,035 \cdot (1 + 0,035)^{13,61}}$$

$$50.000 \cdot \frac{0,035 \cdot (1,035)^{13,61}}{1,035^{13,61} - 1} = C_0$$

$$C_0 = 4.680,72 \text{ €}$$

Terminis diferents als anuals

En tots els apartats anteriors hem suposat que les imposicions o rendes es produïen anualment, però en la majoria de casos no és així.

Si la quota es fa p vegades a l'any considerem que l'interès és la p part de l'any i que els períodes de temps són p vegades el nombre d'anys.

Per exemple, el capital que s'obté, C , amb una quota d'amortització C_0 que efectuem p vegades a l'any, a un interès i durant t anys

$$C = C_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{t \cdot p} - 1}{\frac{i}{p} \cdot \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{t \cdot p}}$$

En l'exemple anterior, si la renda és mensual:

$$50.000 = C_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,035}{12}\right)^{13,61 \cdot 12} - 1}{\frac{0,035}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,035}{12}\right)^{13,61 \cdot 12}}$$

$$C_0 = 385,27 \text{ €}$$

Nota: Un any comercial consta de 12 mesos de 30 dies, és a dir, de 360 dies.

Taxa anual equivalent T.A.E.

Quan dipositem una quantitat o demanem un préstec a una entitat financera, aquesta ens dona els interessos que s'aplicaran anualment. Però, normalment, la quota que rebem pel dipòsit, o la que paguem pel préstec, es fa en terminis inferiors a un any; normalment

- mensualment, si es tracta d'amortitzar un préstec
- trimestralment, si es tracta de cobrar els interessos d'un dipòsit
- ...

això fa que les quotes anuals d'interessos no siguin reals. Per aquest motiu les entitats estan obligades a facilitar la **Taxa Anual Equivalent** o **T.A.E.** que ens permet conèixer quin és redit real que ens genera un dipòsit o un préstec de 1 euro anual amb interès anual i que és líquida p vegades l'any

$$\text{T.A.E} = \left[\left(1 + \frac{i}{p} \right)^p - 1 \right] \cdot 100$$

EXEMPLE

Volem contractar un préstec al 4,5% d'interès anual i ens ofereixen fer els pagaments mensuals, semestrals o anuals. Quina opció ens convé?

$$\text{Mensuals: } \text{T.A.E} = \left[\left(1 + \frac{0,045}{12} \right)^{12} - 1 \right] \cdot 100 = 4,59\%$$

$$\text{Semestrals: } \text{T.A.E} = \left[\left(1 + \frac{0,045}{2} \right)^2 - 1 \right] \cdot 100 = 4,55\%$$

Anualment: 4,50%

Com és un préstec i ens interessa que l'interès sigui mínim escollirem el pagament anual. En canvi, si es tractés d'una imposició ens interessa que sigui màxim i demanarem un pagament mensual.