# TEMA 6 : Funcions

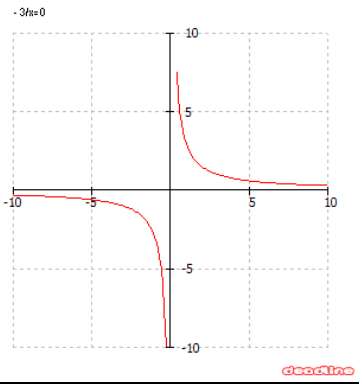
## 6.1. INTRODUCCIÓ

Les diferents ciències coneixen, des de fa temps, lleis que descriuen relacions entre magnituds, de manera que coneixent-ne el valor d'alguna s'obté, inequívocament, el valor de l'altra, Va ser aquest tipus de relacions el que va servir d'origen al concepte de funció.

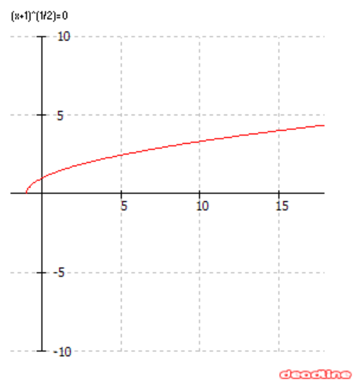
EXEMPLES:

Assigna a cada gràfica la seva equació:

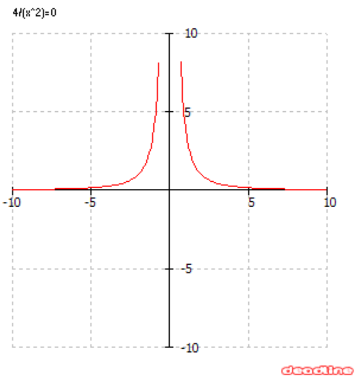
a) $f(x)=\dfrac{3}{x}$



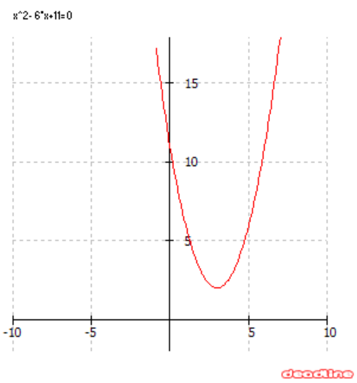

b) $f(x)=\sqrt{x+1}$




c) $f(x)=\dfrac{4}{x^2}$




d) $f(x)=x^2-6x+11$



## 6.2. CONCEPTE DE FUNCIÓ

f és un a funció de $\Re$ en $\Re$ si a cada nombre real $x \in D \subseteq \Re$ li fa correspondre un altre valor ral f(x):

$$f: \quad D \subseteq \Re \longrightarrow \Re$$

$$x \longrightarrow f(x)$$

- El conjunt D: valors que pot prendre la variable independent x. S'anomena *domini de la funció.*
- El conjunt de valors que pot prendre la funció (variable dependent) s'anomena *recorregut*
- f(x) és únic per a cada valor $x \in D$
- Com que tant la variable x com la funció f(x) pren valors reals aquestes funcions s'anomenen *funcions reals de variables reals.*

EXEMPLES

1. f: D $\longrightarrow \Re$

   x $\longrightarrow$ x + 3

   -1 $\longrightarrow$ f(-1) = -1 + 3 = 2

   0 $\longrightarrow$ f(0) = 0 + 3 = 3

   1 $\longrightarrow$ f(1) = 1 + 3 = 4

   .....

2. g: D $\longrightarrow \Re$

   x $\longrightarrow + \sqrt{x}$

   0 $\longrightarrow$ $f(0) = +\sqrt{0} = 0$

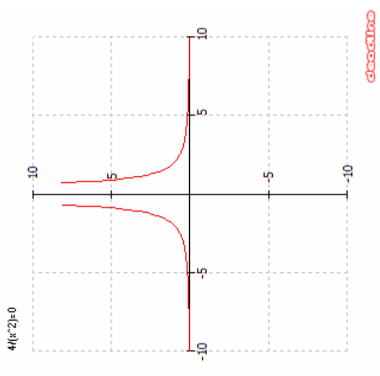
   1 $\quad f(1) = +\sqrt{1} = 1$

   ....

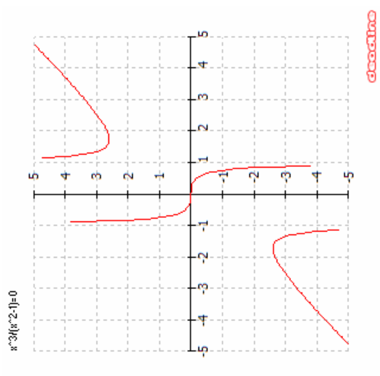
   $\nexists$ f(-1)

3.

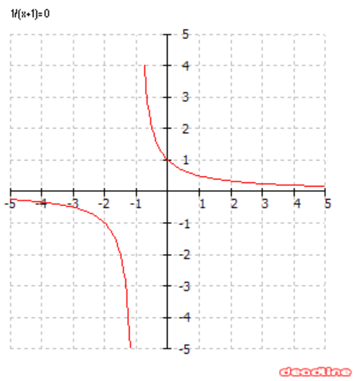
a)



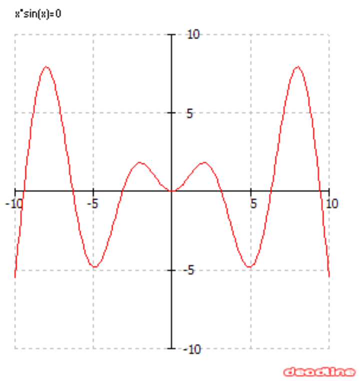
b)



c)




d)




a) , b) no són funcions ja que algun valor de la x li corresponen més d'un valor de la y

c) , d) són funcions ja que a cada valor de x li correspon un únic valor de la y.

## 6.3. CARACTERÍSTIQUES GENERALS DE LES FUNCIONS

### 6.3.1. Domini de definició d'una funció. Recorregut

S'anomena *domini de definició d'una funció* f, i es designa per D(f) o simplement D, al conjunt de valors x per als quals existeix la funció, es a dir, per als quals hi ha f(x).

Raons per els quals el domini de definició pot restringir-se:

a) Context real del qual s'ha extret la funció

Si es parla d'àrea mai la funció mai podrà prendre valors negatius

Si es tracta de l'edat de persones el domini quedarà restringit ( [0, 110]

b) Per voluntat de qui ha proposat la funció

c) Impossibilitat de realitzar algunes operacions amb alguns valor de x

- Denominadors que s'anul·len
- Arrels d'índex parell de nombres negatius
- Logaritmes de nombres negatius ....

NOTA

- Si y = polinomi o exponencial $\rightarrow$ D(y) = $\Re$
- Si $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$ D(y) = $\Re$ - $\{x \in \Re \,/\, g(x) = 0\}$
- Si $y = \sqrt[n]{f(x)}$ , n parell $\rightarrow$ D(y) = $\{x \in \Re \,/\, g(x) \geq 0\}$
- Si y = logf(x) $\rightarrow$ D(y) = $\{x \in \Re \,/\, g(x) > 0\}$

EXEMPLES

Quin es el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{1}{x+3} \rightarrow$ D(y) = $\Re - \{-3\}$, ja que el denominador s'anul·la en x = -3

b) $y = \sqrt{x-2} \rightarrow$ $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow$ D(y) = [2, + ∞ ]

c) Volum del cub: $v = l^3 \rightarrow v \geq 0 \rightarrow l \geq 0 \rightarrow$ D(v) = [0, + ∞ ]

d) y = 2x + 5 $x \in [1, 4] \rightarrow$ D(y) = [1, 4 ], per voluntat de que posa l'enunciat.

El conjunt de valors que pot prendre la funció (variable dependent) s'anomena *recorregut,* i es designa per R(f)

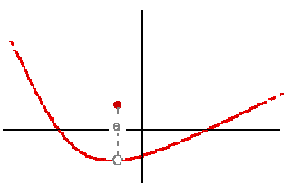
### 6.3.2. Continuïtat

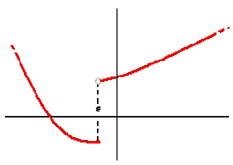
- Les funcions la gràfica de les quals no es pot dibuixar sense aixecar el llapis del full s'anomenen *funcions discontinues.* Els punts en que necessariament s'ha d'aixecar el llapis del full s'anomenen *punts de discontinuïtat* .

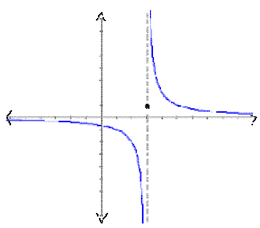
- Les funcions amb una gràfica tal que la podem dibuixar sense aixecar el llapis del full s'anomenen *funcions continues*.

- Tipus de discontinuïtat:

  - Discontinuïtat evitable
  - Discontinuïtat de salt
  - Discontinuïtat asimptòtica


evitable

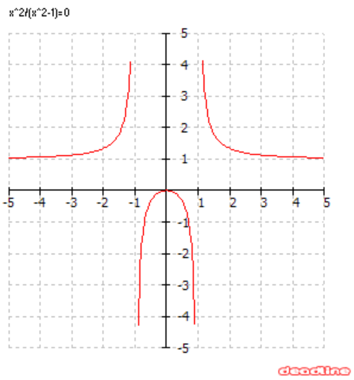

salt


asimptòtica

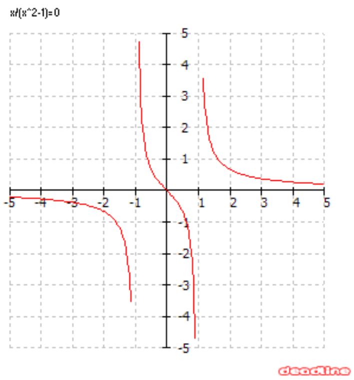
### 6.3.3. Simetria

- Direm que una funció és *parell* si és simètrica respecte a l'eix d'ordenades, en aquest cas f(-x) = f(x)
- Direm que una funció és *senar* si és simètrica respecte a l'origen de coordenades, en aquest cas f(-x) = -f(x)

Gràficament:




Funció parell




Funció senar

### 6.3.4. <u>**Punts de tall amb els eixos de coordenades**</u>

- Si un punt talla a l'eix d'abscisses → y = 0, P(x,0)
- Si un punt talla a l'eix d'ordenades → x = 0, P(0,y)

### 6.3.5. <u>**Creixement i decreixement. Màxims i Mínims**</u>

- Direm que una funció f(x) és *creixent* entre x = a i x = b, si la gràfica no baixa mai entre a i b, es a dir:

  F creixent en (a, b) ↔ si c, d ∈ (a,b) / c < d → f(c) ≤ f(d)

  Si f(c) < f(d) direm que la funció és *estrictament creixent*

- Direm que una funció f(x) és *decreixent* entre x = a i x = b, si la gràfica no puja mai entre a i b, es a dir:

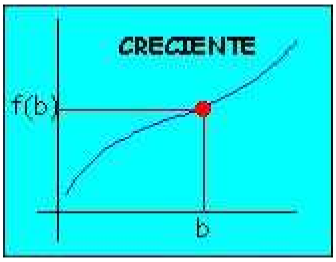
  F decreixent en (a, b) ↔ si c, d ∈ (a,b) / c < d → f(c) ≥ f(d)

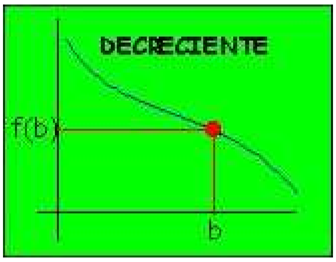
  Si f(c) > f(d) direm que la funció és *estrictament decreixent*

- Direm que una funció f(x) és constant entre x = a i x = b si la gràfica entre aquest dos valors ni puja ni baixa, es a dir:

  F constant en (a, b) ↔ si c, d ∈ (a,b) → f(c) = f(d)

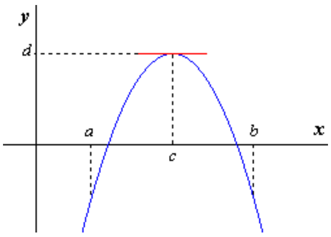
Gràficament

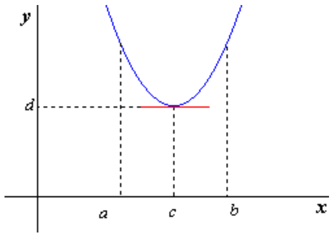



- Direm que en x = c f(x) assoleix un *màxim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de creixent a decreixent.
- Direm que en x = c f(x) assoleix un *mínim relatiu* quan just en aquest valor la funció passa de decreixent a creixent.

Gràficament




en c de creixent a decreixent

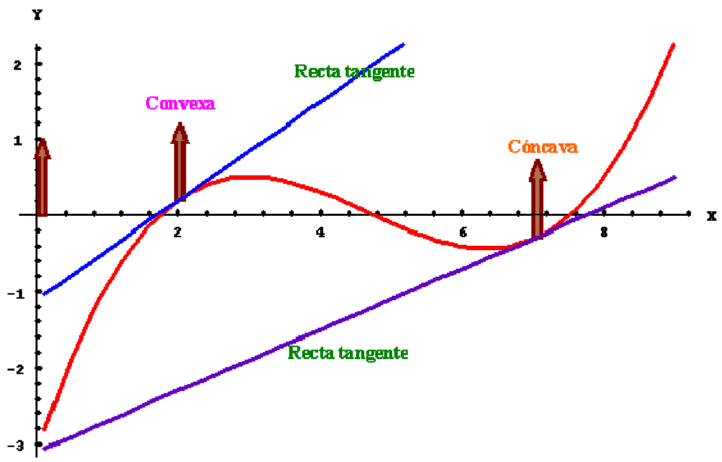
en c de decreixent a creixent

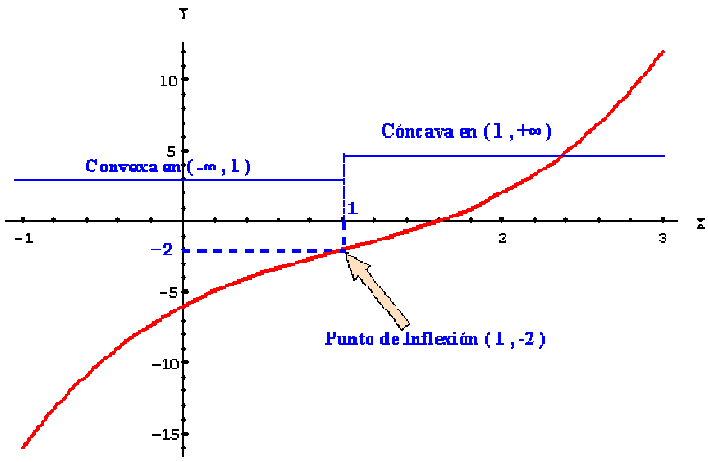
- Els màxims i mínims relatius s'anomenen *extrems relatius* de la funció

## 6.3.6. <u>Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.</u>

- Una funció es *còncava* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sota de la gràfica.
- Una funció es *convexa* en un interval (a,b) si totes les tangents a la gràfica en aquest interval queden per sobre de la gràfica.
- El punt en que la gràfica d'una funció passa de ser còncava a convexa o al contrari s'anomena <u>punt d'inflexió</u>. En aquest punt la tangent travessa la gràfica.

Gràficament:




## 6.4. <u>COMPOSICIÓ DE FUNCIONS</u>

Donades dos funcions $f$: $A \rightarrow B$ i $g$: $B \rightarrow C$, on la imatge de $f$ està continguda en el domini de $g$, es defineix la funció composició ($g$ o $f$ ): $A \rightarrow C$ com **($g$ o $f$)($x$) = g($f$($x$))**

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

$f: R \to R$ $\quad\quad\quad\quad$ $g: R \to R$

$x \to \frac{1}{x}$ $\quad\quad\quad\quad$ $x \to \sqrt{x}$

Aleshores

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \xrightarrow{g} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

<u>EXEMPLES</u>

1. Si f(x) = x + 3 i g(x) = $\frac{3x}{x+2}$, trobeu

a) $(g \circ f)(4) = g[f(4)] = g[7] = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

b) $(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g[1] = \frac{3}{3} = 1$

c) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x+3] = \frac{3(x+3)}{x+3+2} = \frac{3x+9}{x+5}$

<u>NOTA</u>

- L'expressió ($g$ o $f$)($x$) es llegeix f composta amb g
- En general $g(f(x)) \neq f(g(x))$
- La funció I : x $\longrightarrow$ x rep el nom de *funció identitat*

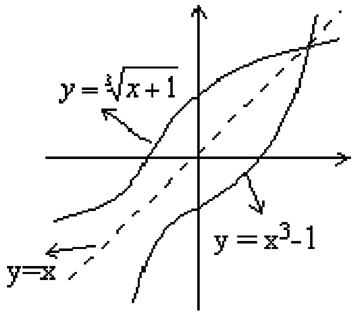
## 6.5. <u>FUNCIÓ RECIPROCA O INVERSA</u>

- S'anomena funció reciproca o invers de $f$ una altra funció que es designa per $f^{-1}$ que compleix la condició següent
    - Si f (a) = b $\leftrightarrow$ $f^{-1}$ (b) = a
- Les funcions f i $f^{-1}$ verifiquen que :

$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x) \leftrightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = I(x) \leftrightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

I(x) funció identitat

- Les gràfiques de f i $f^{-1}$ són simètriques respecte a la recta y = x




NOTA

Per calcular $f^{-1}$ cal intercanviar la variable x per y ( y = f(x) → x = f(y)) i aïllar la y de l'expressió

EXEMPLES

Trobeu la funció reciproca de la funció $f(x) = x^3 - 6$ i comproveu que el resultat és correcte

$f(x) = x^3 - 6 \rightarrow x = y^3 - 6 \rightarrow x + 6 = y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{x+6} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$

Comprovació

- $(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\sqrt[3]{x+6}\right] = \left[\sqrt[3]{x+6}\right]^3 - 6 = x + 6 - 6 = x$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left[f\ (x)\right] = f^{-1}\left[x^3 - 6\right] = \left[\sqrt[3]{x^3 + 6 - 6}\right] = \sqrt[3]{x^3} = x$

## 6.6. FUNCIÓ DEFINIDA A TROSSOS

- Les *funcions definides a trossos* són aquelles que dones diverses fórmules, cadascuna de les quals regeix el comportament de la funció en un tram determinat

EXEMPLE

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b)

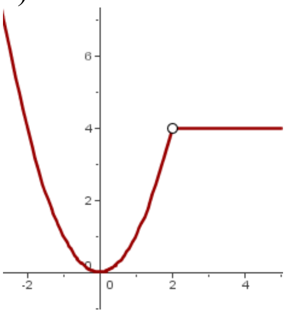
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x+6 & si \quad 3 < x \leq 6 \\ 0 & si \quad 6 < x \end{cases}$$

- La seva representació gràfica és senzilla si sabem representar cadascuna i es fa atenció al seu comportament en els punts d'enllaç de cada tram.

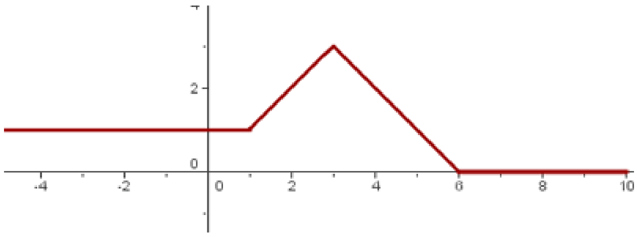
<u>EXEMPLE</u>

Representeu gràficament les funcions definides a trossos anteriors

a)



b)



## 6.7. VALOR ABSOLUT D'UNA FUNCIÓ

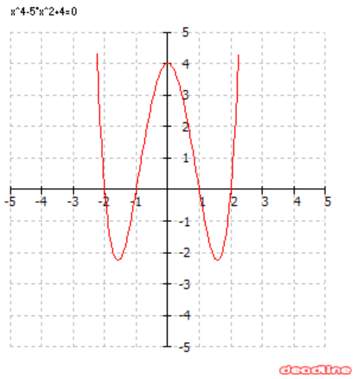
Recordeu que :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

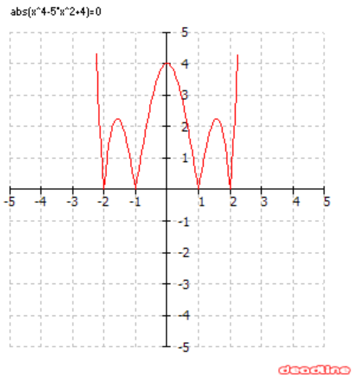
En general, el valor absolut d'una funció es defineix com:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{quan } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{quan } f(x) < 0 \end{cases}$$

Gràficament:




f(x)




| f(x) |

Les funcions en valor absolut se transformen en funcions a trossos seguint els següents passos:

1. Igualar a zero la funció sense valor absolut i calcular les seves arrels
2. Formar intervals amb les arrels i avaluar el signe de la funció en cada interval
3. Definir la funció a trossos, tenint en compte que en els intervals on la funció és negativa s'ha de canviar el signe de la funció, i en aquells trams on la funció és positiva cal deixar-la igual.

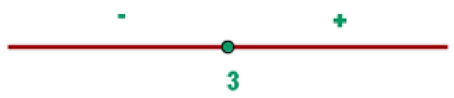
<u>EXEMPLE</u>

Expresseu les següents funcions, com funcions definides a trossos i feu la seva representació gràfica.

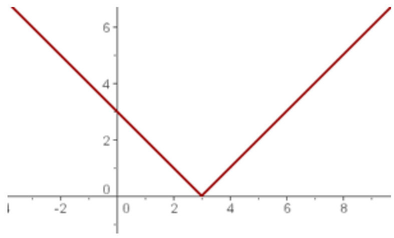
a)

$f(x)=|x-3|$

$x-3=0 \qquad\qquad x=3$




$$f(x)=\begin{cases}-(x-3) & \text{si} \quad x<3\\ x-3 & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$$

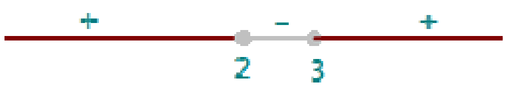



Funció a trossos — Gràfica de la funció

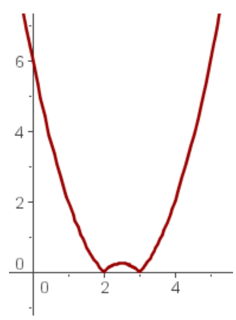
b)

$f(x)=|x^2-5x+6|$

$x^2-5x+6=0 \qquad x=2 \qquad x=3$




$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+6 & \text{si} \quad x<2\\ -(x^2-5x+6) & \text{si} \quad 2\leq x<3\\ x^2-5x+6 & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$$




Funció a trossos — Gràfica de la funció